



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΜΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**THE MATHEMATICAL THEORY OF DISTRIBUTED SENSOR
NETWORKS – EXTENSIONS OF THE ART GALLERY
PROBLEM**

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΛΑΔΑΣ

A.M.: 2022202002013

Επιβλέπων καθηγητής : κ. Κωνσταντίνος Πέππας
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πελοποννήσου

Αθήνα | Νοέμβριος 2021

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Εικόνων.....	4
Ευρετήριο Πινάκων.....	5
Περίληψη.....	6
Abstract	7
1 Εισαγωγή.....	8
1.1 Τι είναι ένα Κατανεμημένο Σύστημα	9
1.2 Τα κατανεμημένα δίκτυα αισθητήρων και οι απαιτήσεις τους	10
1.3 Ζητήματα πολυπλοκότητας Αλγορίθμων – Ορισμοί	10
1.4 Gallery guarding - Ιστορικό και σχετικές εργασίες	12
1.5 Εφαρμογές των προβλημάτων κάλυψης	14
2 Το πρόβλημα art gallery	15
2.1 Περιγραφή του προβλήματος	15
2.2 Το θεώρημα επαρκών φυλάκων κάλυψης.....	16
2.3 Παράδειγμα τριγωνισμού και χρωματισμού πολυγώνου	19
3 Επέκταση του art gallery problem – Χρωματισμός	21
3.1 Καθορισμός ελάχιστου αριθμού χρωμάτων	21
3.2 Ανώτερα όρια για το Chromatic Art Gallery Problem.....	23
4 Το πρόβλημα του κινούμενου φύλακα	25
4.1 Περιγραφή του προβλήματος – σύγχρονες προσεγγίσεις.....	25
4.2 Εισαγωγικές έννοιες – Ορισμοί- Μεθοδολογία	26
4.2.1 Τύποι κινητών φυλάκων.....	29
4.2.2 Πολύγωνα με τρύπες.....	30
4.3 Επισκόπηση της Σταθερής Υπόθεσης	33
4.4 Παρουσίαση του Αλγορίθμου	36
4.5 Υπολογισμός των ουσιαστικών κοπών	37
5 Συμπεράσματα	39
6 Πηγές – Βιβλιογραφία	40

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1 - Κατανεμημένο δίκτυο υπολογιστών.....	9
Εικόνα 2 - Παράδειγμα Δομής γραφήματος DSN	12
Εικόνα 3 - Α) κυρτό πολύγωνο, Β), Γ), Δ), μη κυρτά πολύγωνα.....	16
Εικόνα 4 - Πολύγωνο 6 – πλευρών.....	1Error! Bookmark not defined.
Εικόνα 5 - Μη κυρτό 6 – γωνο.	18
Εικόνα 6 - 6 Pigeonhole	18
Εικόνα 7 - Πολύγωνο 12 πλευρών (Διαδικασία τριγωνισμού)	19
Εικόνα 8 - 12 - πλευρο πολύγωνο χωρισμένο σε τρίγωνα	20
Εικόνα 9 - Χρωματισμός 12-γώνου	20
Εικόνα 10 - 29-γωνο (για $k=3$) με 9 προεσοχές, s_1 σωματοφύλακας, s_2 φύλακας κορυφής	21
Εικόνα 11 - Κάλυψη τριών φυλάκων (τρία χρώματα).....	23
Εικόνα 12 - Κάλυψη ενός σπειροειδούς πολυγώνου.....	23
Εικόνα 13 - Παράδειγμα πολυγώνου με τη συντομότερη διαδρομής φύλακα.....	2Error! Bookmark not defined.
Εικόνα 14 - Αναπαράσταση των ορισμών των κοπών	28
Εικόνα 15 - Δύο τύποι κινητών φυλάκων.....	29
Εικόνα 16 - Κινούμενοι φύλακες σε μη μονότονο επτάγωνο.....	30
Εικόνα 17 - Πολύγωνα με σπές.....	30
Εικόνα 18 - Πολύγωνα με σπές που μοιράζονται ακμές ή κορυφές	31
Εικόνα 19 - Παράδειγμα εξίσωσης τριγωνισμού (Euler).....	32
Εικόνα 20 - Το 24-γωνο με 3 τρύπες	32
Εικόνα 21 - Οι τρεις περιπτώσεις επαφής.....	33
Εικόνα 22 - Αναπαράσταση της διαδικασίας «ξεδιπλώματος».....	35
Εικόνα 23 - Οι κυρίαρχες κοπές έχουν εξαλειφθεί από το C.....	38

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας Α. Ανω όρια για τα σημεία κάλυψης.....	13
--	----

Περίληψη

Τα κατανεμημένα δίκτυα αισθητήρων (DSN) είναι αυτόνομα συστήματα μεγάλης κλίμακας που χρησιμοποιούνται για τη συλλογή δεδομένων με έξυπνο τρόπο. Περιγράφηκαν από το αμερικανικό εβδομαδιαίο επιχειρηματικό περιοδικό Business Week ως ένας κλάδος από τον εικοστό πρώτο αιώνα, του οποίου η τεχνολογία προχωρά έξω από το λίκνο των εργαστηρίων και των ερευνητικών εργασιών με όλο και αυξανόμενο αριθμό εφαρμογών και μελετών. Επιπροσθέτως, η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια, το μειούμενο κόστος παραγωγής αισθητήρων, οι νέες δυνατότητες αυτών καθώς και η δημιουργία νέων πρωτοκόλλων επικοινωνίας, έδωσε οπτικές και δυνατότητες στους μηχανικούς δικτύων που δεν υπήρχαν πριν. Αυτή η τεράστια πρόοδος που υπήρξε στις τεχνολογίες του Διαδικτύου σε συνδυασμό με την αξιοποίηση των Μαθηματικών θεωριών που τις υποστηρίζουν, μετουσιώθηκε σε κάτι πιο ρηξικέλευθο, όπως για παράδειγμα τα Δίκτυα Ασύρματων Αισθητήρων τα οποία μαζί με παρελκόμενες εφαρμογές και τεχνολογίες αποτελούν το *Internet of Things*.

Λέξεις – κλειδιά: Κατανεμημένα δίκτυα αισθητήρων, DSN, επικοινωνία, δεδομένα, πρόβλημα φύλαξης, κινούμενος φύλακας, κοπές, κάλυψη.

Abstract

Distributed sensor networks (DSNs) are large-scale, autonomous systems used to collect data intelligently. This area was described by the American business magazine Business week as an industry from the twenty-first century, whose technology is advancing out of the cradle of laboratories and research work with a growing number of applications and studies. In addition, the rapid development of technology in recent years, the declining cost of sensor production, their new capabilities as well as the creation of new communication protocols, gave visions and capabilities to network engineers that did not exist before. This tremendous advancement in Internet technologies, combined with the use of the Mathematical Theories that support them, has been transformed into something more groundbreaking, such as Wireless Sensor Networks, which together with the accompanying applications and technologies constitute the Internet of Things.

Keywords: Distributed sensor networks, DSN, communication, data, art gallery problem, moving guard, cuts, coverage.

1 Εισαγωγή

Η τεχνολογία των ασύρματων δικτύων αισθητήρων, *Wireless Sensor Networks*, (WSN) έχει εξελιχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια και αποτελεί πλέον ένα ισχυρό εργαλείο σε θέματα γεωπληροφορικής, βιομηχανίας, επιχειρήσεων, παρακολούθησης, αυτοκίνησης, ασφάλειας, νοικοκυριών και γενικά σε όλο το φάσμα των σύγχρονων δραστηριοτήτων του ανθρώπου.

Στην εξέλιξη αυτών των συστημάτων έχει συμβάλει η πρόοδος στη μικρογραφία της Μικροηλεκτρονικής και της Μηχανικής των δομών, έτσι ώστε ένα WSN να αποτελείται από πολλούς μικροσκοπικούς κόμβους αισθητήρων που έχουν δυνατότητες ανίχνευσης, υπολογισμού και επικοινωνίας. Οι κόμβοι αισθητήρων είναι συχνά χαμηλού κόστους και ισχύος, μικρού μεγέθους και συνήθως παραμένουν χωρίς έλεγχο και χωρίς επίβλεψη μετά την ανάπτυξη τους. Μπορούν να αναπτυχθούν στο έδαφος, στο υπέδαφος, υποβρύχια, στον αέρα, σε οχήματα ή σε κτίρια. Συνήθως, ένας κόμβος αισθητήρα έχει εύρος επικοινωνίας μικρότερο από 100 πόδια (30 μέτρα περίπου). Ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων (WSN) τυπικά αποτελείται από μεγάλο αριθμό διαφόρων τέτοιων αισθητήρων σε αδόμητα περιβάλλοντα.

Τα κατανεμημένα δίκτυα αισθητήρων, *Distributed Sensor Networks*, (DSN) είναι αυτόνομα συστήματα μεγάλης κλίμακας που χρησιμοποιούνται για τη συλλογή δεδομένων με έξυπνο τρόπο. Καθώς η τεχνολογία για τους αισθητήρες προχωρά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε μεγάλους και ακριβούς αισθητήρες με σμήνη μικρών, φθηνών τοπικών αισθητήρων. Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν πλέον τα δίκτυα αισθητήρων είναι ο τρόπος ενσωμάτωσης των τοπικών δεδομένων σε μια συνολική εικόνα ενός περιβάλλοντος και ο τρόπος διαχείρισης της υπερφόρτωσης πληροφοριών. Φανταστείτε, για παράδειγμα, ότι έχουμε χιλιάδες κινητές βιντεοκάμερες και μία από αυτές «πιάνει» κάτι σημαντικό. Πώς θα πρέπει το σύστημα να αυτο-οργανωθεί για να παγιδεύσει το συμβάν; Για να το κάνουμε πιο ενδιαφέρον, ας υποθέσουμε ότι δεν έχουμε GPS, ανιχνευτές απόστασης, αισθητήρες προσανατολισμού ή πυξίδα. Πώς θα αντιμετωπίσουμε αυτή την περίπτωση; Ευτυχώς, οι μαθηματικοί έλυσαν παρόμοια προβλήματα μετάβασης από τα τοπικά συνδυαστικά δεδομένα σε μια συνολική εικόνα (περίπου εκατό χρόνια πριν). Η Υπολογιστική Γεωμετρία, όπως και άλλοι τομείς των Μαθηματικών σαν την Διαφορική Γεωμετρία, την Τοπολογία, κ. ά, είναι εκπληκτικά αποτελεσματικές στην απάντηση ερωτήσεων σχετικά με την κάλυψη ενός χώρου και άλλων προβλημάτων που αντιμετωπίζουν τα δίκτυα αισθητήρων.

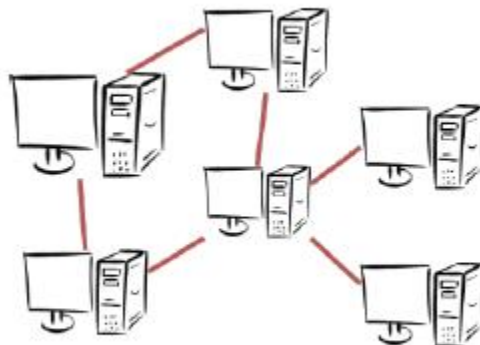
Σε αυτή την εργασία παρουσιάζουμε την απόδειξη του διάσημου προβλήματος “*art gallery*” μέσω της Μαθηματικής προσέγγισης της Υπολογιστικής Γεωμετρίας και το επεκτείνουμε στην περίπτωση του χρωματισμού με τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών χρωμάτων των φυλάκων, και την περίπτωση του κινούμενου φύλακα. Στα Μαθηματικά, όλες οι λύσεις και οι τεχνικές της Υπολογιστικής Γεωμετρίας μπορούν να συσχετισθούν με συγκεκριμένες εφαρμογές στη ρομποτική, τα γραφικά, την υπολογιστικά βοηθούμενη σχεδίαση/παραγωγή (CAD/CAM) και τα γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών. Σαν υποπεδίο της Σχεδίασης και Ανάλυσης Αλγορίθμων η Υπολογιστική Γεωμετρία

ασχολείται κυρίως με τη συστηματική μελέτη αλγορίθμων και δομών δεδομένων για διάφορα γεωμετρικά προβλήματα.

Στο Κεφάλαιο 1 διευκρινίζεται η σημασία και η θέση που κατέχουν τα δίκτυα αισθητήρων στο πλαίσιο του σχεδιασμού των δικτύων ως πεδίο έρευνας και επίσης παρέχουμε μια εισαγωγή στα DNS και στο *art gallery problem*. Στο Κεφάλαιο 2, αναπτύσσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο του προβλήματος *art gallery* με την απόδειξή του. Στο Κεφάλαιο 3, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα κάλυψης χρωματικά, βρίσκοντας τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό ενός συνόλου φυλάκων και στο Κεφάλαιο 4, υπολογίζουμε τον μέγιστο χρόνο του αλγορίθμου στην περίπτωση του κινούμενου φύλακα και εξετάζουμε τα πολύγωνα με σπές. Τέλος στο Κεφάλαιο 5, περιγράφουμε τις αναζητήσεις και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του προβλήματος μας.

1.1 Τι είναι ένα Κατανεμημένο Σύστημα

Ένα κατανεμημένο σύστημα αποτελείται από ένα πλήθος αυτόνομων κόμβων που επικοινωνούν μεταξύ τους με κάποιο τρόπο για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου κοινού στόχου. Για παράδειγμα τα περισσότερα κρίσιμα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα είναι κατανεμημένα (τραπεζικά δίκτυα, *Internet*, *Mobile and Wireless Systems*). Ουσιαστικά είναι μια συλλογή από αυτόνομους υπολογιστές που συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός δικτύου και χρησιμοποιούν ειδικά σχεδιασμένο λογισμικό για την παροχή ενοποιημένων υπολογιστικών υπηρεσιών, εκτελώντας διεργασίες επικοινωνίας μεταξύ τους και συντονισμού των κινήσεων τους μόνο μέσω ανταλλαγής μηνυμάτων.



Εικόνα 1 Κατανεμημένο δίκτυο υπολογιστών

Απαιτούν εντελώς διαφορετικό λογισμικό από αυτό που χρησιμοποιούν τα κεντρικοποιημένα συστήματα και όπως αναφέρει και ο *Leslie Lamport* [1] «γνωρίζεις ότι έχεις ένα κατανεμημένο σύστημα όταν ένα σφάλμα ενός Η/Υ που ούτε ήξερες ότι υπάρχει, μπορεί να αχρηστεύσει τον δικό σου Η/Υ».

1.2 Τα καταναμημένα δίκτυα αισθητήρων και οι απαιτήσεις τους

Ένα καταναμημένο δίκτυο αισθητήρων (DSN) μπορεί να οριστεί ως ένα σύνολο χωρικά διάσπαρτων ευφυών αισθητήρων που είναι σχεδιασμένοι να λαμβάνουν μετρήσεις από το περιβάλλον και να χρησιμοποιούν τις σχετικές πληροφορίες από τα δεδομένα που συνέλεξαν για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Το DSN εξαρτάται από πολλούς επεξεργαστές που συλλέγουν και επεξεργάζονται πληροφορίες από πολλές πηγές ταυτόχρονα. Η αρχιτεκτονική του δικτύου τους συνήθως ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- (1) Το δίκτυο πρέπει να έχει τεχνητή νοημοσύνη σε κάθε κόμβο.
- (2) Πρέπει να φιλοξενεί διαφορετικούς αισθητήρες.
- (3) Η απόδοσή του δεν πρέπει να υποβαθμίζεται λόγω της χωρικής κατανομής.

Επίσης το DSN λειτουργεί υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

- Κάθε αισθητήρας στο σύνολο μπορεί να δει μερικές αλλά όχι όλες τις χαμηλού επιπέδου δραστηριότητες που εκτελούνται από το δίκτυο αισθητήρων στο σύνολό του.
- Τα δεδομένα είναι φθαρτά, με την έννοια ότι η αξία των πληροφοριών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το χρόνο που απαιτείται για την απόκτηση και την επεξεργασία της.
- Θα πρέπει να υπάρχει περιορισμένη επικοινωνία μεταξύ των επεξεργαστών των αισθητήρων, έτσι ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί άμεσα η ανταλλαγή μηνυμάτων.
- Τέλος θα πρέπει να υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες στο σύστημα για να ξεπεράσει ορισμένες δυσμενείς συνθήκες (π.χ. αστοχίες κόμβων και συνδέσμων) ώστε να μπορέσει να καταλήξει σε μια λύση στη συγκεκριμένη εργασία που του έχει ανατεθεί.

Σε ένα τυπικό DSN, κάθε κόμβος πρέπει να συγχωνεύει τις τοπικές πληροφορίες με τα δεδομένα που συλλέγονται από τους άλλους κόμβους έτσι ώστε να λαμβάνεται μια ενημερωμένη αξιολόγηση του περιβάλλοντος που ελέγχει ή ερευνά. Η διατήρηση της συνέπειας και η εξάλειψη του πλεονασμού είναι δύο σημαντικά ζητήματα, όπως επίσης και το πρόβλημα του προσδιορισμού των δεδομένων που θα πρέπει να κοινοποιηθούν είναι πιο σημαντικό από το πώς αυτή κάθεαυτή η επικοινωνία θα πραγματοποιηθεί [2,3] [4].

1.3 Ζητήματα πολυπλοκότητας Αλγορίθμων – Ορισμοί

Ένα από τα πιο κρίσιμα ζητήματα στα DSN είναι η ενεργειακή απόδοση τους που εξαρτάται από την αποτελεσματικότητα, ως προς τον χρόνο, των πολύπλοκων αλγορίθμων που εκτελούνται σε ξεχωριστά μέρη του DSN για διάφορες εργασίες. Για παράδειγμα ένας αλγόριθμος δρομολόγησης κακής

ποιότητας μπορεί να οδηγήσει σε συμφόρηση των κόμβων και τεράστια σπατάλη ενέργειας. Ο σημαντικότερος ίσως προβληματισμός σχετικά με τους αισθητήρες έχει να κάνει με την διάρκεια ζωής της μπαταρίας και το πόσο συχνά αυτοί θα εκπέμπουν το σήμα τους, με πιο κρίσιμη παράμετρο τον χρόνο ζωής των μπαταριών των συσκευών. Συνήθως η κατανάλωση αποκλίνει από τα θεωρητικά και κατασκευαστικά μεγέθη σε πραγματικές συνθήκες «αφιλόξενου» περιβάλλοντος, γεγονός που στην πράξη μεταβάλλει τους όρους του όλου εγχειρήματος.

Το πλέον ζωτικό ζήτημα των DSN ονομάζεται πρόβλημα (κάλυψης – ελέγχου) *Art-Gallery Problem* [5].

Ο κύριος στόχος αυτού του προβλήματος, σε τρισδιάστατες περιοχές, είναι να βρεθεί ένα σύνολο σημείων, έστω S σε ένα υποσύνολο του τρισδιάστατου χώρου, έστω A ($A \subseteq \mathbb{R}^3$) τέτοιο ώστε :

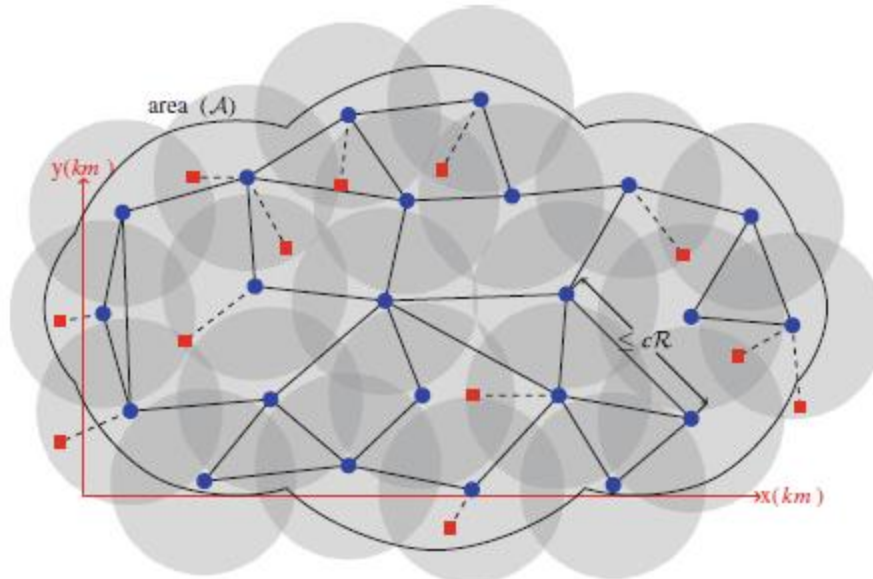
$$\forall X \in A: \exists Y \in S: \overline{XY} \subseteq A \quad (1.1)$$

Με άλλα λόγια, οποιοδήποτε σημείο στην περιοχή A να μπορεί να είναι ορατό από ένα σημείο του συνόλου λύσεων του S (για κάθε ζεύγος σημείων X, Y του τρισδιάστατου χώρου θα πρέπει να υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα που να τα συνδέει). Αν με $\mathcal{G}A \subseteq A$ υποδηλώσουμε το όριο (σύνορο) της περιοχής A τότε η ακόλουθη πρόταση είναι ισοδύναμη με την παραπάνω πρόταση (1.1):

$$\forall X \in \mathcal{G}A: \exists Y \in S: \overline{XY} \subseteq A$$

Η Γεωμετρική ερμηνεία αυτού του ζητήματος μπορεί να αξιοποιηθεί σε εφαρμογές, όπως η φύλαξη συνόρων, η εποπτεία κρίσιμων υποδομών (π.χ. αγωγοί πετρελαίου, δίκτυο ύδρευσης, δίκτυο ηλεκτροδότησης, δίκτυο δεδομένων, δίκτυο επικοινωνιών) και γενικότερα σε εφαρμογές της ευρύτερης περιοχής του *Internet of Things*.

Για το θέμα της κάλυψης και της συνδεσιμότητας, προκειμένου να μοντελοποιήσουμε ένα DSN, χρησιμοποιούμε ένα γεωμετρικό γράφημα στο οποίο σημειώνεται κάθε κόμβος αισθητήρα από μια κορυφή, η θέση της οποίας καθορίζεται από τις συντεταγμένες του αισθητήρα και η σύνδεση μεταξύ δύο κόμβων αντιπροσωπεύεται από μία ακμή που συνδέει τις δύο κορυφές.



Εικόνα 2 Παράδειγμα Δομής γραφήματος DSN

Το πρόβλημα της κάλυψης είναι ένα θεμελιώδες ζήτημα στα DSN. Σε αυτό το πρόβλημα, ο στόχος είναι να καθοριστεί πόσο καλά μπορεί ένα σύνολο αισθητήρων να «παρακολουθεί - καλύπτει» μια δεδομένη περιοχή [6, 7].

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε την ανάπτυξη των κόμβων αισθητήρων (μπλε κύκλοι) και ορισμένων στόχων ανίχνευσης (κόκκινα ορθογώνια) στον Ευκλείδειο χώρο (επίπεδο - R^2). Σε αυτό το σύστημα, η ακτίνα οποιουδήποτε γκρι κύκλου είναι R έτσι ώστε οι κόμβοι των αισθητήρων να καλύπτουν μέσω της ακτίνας R όλη την περιοχή A . Σε αυτό το δίκτυο, κάθε κόμβος αισθητήρα διαθέτει το ίδιο εύρος ανίχνευσης R (δηλαδή την μέγιστη ευκλείδεια απόσταση μεταξύ της θέσης του αισθητήρα και του στόχου που ανιχνεύει ο αισθητήρας) και το εύρος επικοινωνίας του είναι cR (δηλ. η μέγιστη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο παρακείμενων κόμβων αισθητήρων).

1.4 Gallery guarding - Ιστορικό και σχετικές εργασίες

Σε μια γεωμετρική περιοχή M , θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη κάλυψη η οποία χρησιμοποιεί τον μικρότερο αριθμό σημείων $\{g_i\}$ μέσα στο M έτσι ώστε οποιοδήποτε οριακό σημείο $p \in \partial M$ να είναι ορατό από τουλάχιστον ένα σημείο κάλυψης. Σε αυτή την περιοχή, το M είναι ένα τρισδιάστατο σχήμα του οποίου το όριο ∂M παριστάνεται από ένα πολυγωνικό πλέγμα. Για ένα δεδομένο σημείο κάλυψης g_i , οποιοδήποτε σημείο $p \in \partial M$ είναι ορατό από το g_i εάν το ευθύγραμμο τμήμα $g_i p$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο M (θεωρούμε το ∂M ως υποσύνολο του M).

Διάφορες εκδόσεις αυτού του προβλήματος ονομάζονται γενικά προβλήματα *Art Gallery* που είναι γνωστά ως διάσημα προβλήματα με υψηλή πολυπλοκότητα. Ακόμα και στην περίπτωση των δύο

διαστάσεων (2-D), το πρόβλημα είναι γνωστό ως *NP-Complete* (Επεξήγηση Παρ. 4.1) ενώ, μέχρι τώρα, πολύ λίγα είναι γνωστά για το πρόβλημα κάλυψης σε τρεις διαστάσεις. [25]

Το πρόβλημα Art Gallery προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Klee. Τα σημεία κάλυψης μπορούν να περιοριστούν σε οριακές κορυφές ($p \subseteq \partial M$), εσωτερικές κορυφές ($p \subseteq M$) ή κινητές κορυφές. Όταν δεν είναι κινητά, ονομάζονται ακίνητα. Εάν περιορίζονται στο όριο, ονομάζονται προστατευτικές κορυφές ενώ εάν δεν υπάρχει περιορισμός στα όρια, αναφέρονται ως απλά σημεία φύλαξης.

Στο διδιάστο χώρο (επίπεδο 2-D), ο Chvátal και ο Fisk [26] έδειξαν και οι δύο ότι το απλό πολύγωνο M , υποσύνολο του R^2 , χρειάζεται το πολύ $\lceil n/3 \rceil$ σταθερά σημεία, βάσει των οποίων ο Avis και ο Toussaint [26] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ για τη θέση των σημείων στο M .

Ο Ο'Ρούρκ [27] έδειξε ότι τα κινητά σημεία $\lceil n/4 \rceil$ είναι επαρκή για ένα απλό πολύγωνο M (n κορυφών) υποσύνολο του R^2 . Περισσότερα αποτελέσματα αναλύονται στον Πίνακα Α.

Work	M type	Guard type	Optimal bound
Chvatal	Simple, 2D	Stationary	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$
Rourke	Simple, 2D	Mobile	$\lceil \frac{n}{4} \rceil$
Urrutia	Simple, 2D	Edge	$\lceil \frac{n}{4} \rceil$
Kahn et al. and Rourke	Orthogonal, 2D	Stationary	$\lceil \frac{n}{4} \rceil$
Rourke	h holes, 2D	Vertex	$\lceil \frac{n+2h}{3} \rceil$
Hoffmann et al. and Bjorling-Sachs et al.	h holes, 2D	Point	$\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$
Gyori et al.	Orthogonal, h holes, 2D	Mobile	$\lceil \frac{3n+4h+4}{16} \rceil$

Πίνακας Α. Άνω όρια για τα σημεία κάλυψης

Ο πίνακας Α συνοψίζει τα συντηρητικά ανώτερα όρια για τους απαραίτητους φύλακες σε διάφορες περιοχές.

Δεδομένης μιας συγκεκριμένης περιοχής, μας ενδιαφέρει ο σχεδιασμός ενός πρακτικού αλγορίθμου για την εύρεση των βέλτιστων σημείων φύλαξης αυτής (*point guard*), που εξαρτάται από την τοπολογία και την γεωμετρία αυτής της περιοχής. Η φύλαξη μιας δεδομένης περιοχής είναι ωφέλιμη σε πολλές γεωμετρικές υπολογιστικές εφαρμογές.

Ωστόσο, Ο υπολογισμός της βέλτιστης φύλαξης είναι εξαιρετικά δύσκολος. Η εύρεση ελάχιστων φρουρών αποδείχθηκε ότι είναι NP-Hard για 2-D πολύγωνα με τρύπες [1], 2-D απλά πολύγωνα [28], και ακόμη και διδιάστατα απλά ορθογώνια πολύγωνα [29, 30], χρησιμοποιώντας είτε κορυφές είτε σημεία φύλαξης.

Τέλος οι Efrat και Har-Peled [31] βρήκαν προστατευτικές κορυφές για διδιάστατες απλές πολυγωνικές περιοχές και πολυγωνικές περιοχές h -οπών σε $O(nc^2_{\text{οπτ}} \log^4 n)$ αναμενόμενο χρόνο.

1.5 Εφαρμογές των προβλημάτων κάλυψης

Πολλά προβλήματα που άπτονται της υπολογιστικής γεωμετρίας προκύπτουν συχνά, για παράδειγμα στον προγραμματισμό βιντεοπαιχνιδιών, όπου είναι πολλές φορές απαραίτητο να εκτελούνται υπολογισμοί με βάση έναν εικονικό κόσμο για να δημιουργηθεί μια ρεαλιστική εμπειρία για τον χρήστη. Φανταστείτε ένα βιντεοπαιχνίδι, που έχετε παίξει, και περιλαμβάνει έναν εικονικό κόσμο και πώς ο ήρωας πρέπει να ξεπεράσει προκλήσεις όπως την ανίχνευση του χώρου, συγκρούσεις αντικειμένων, την αναπαράσταση της επιφάνειας του εδάφους του εικονικού κόσμου, την ανίχνευση κίνησης, τον προσδιορισμό αντικειμένων κ.ά. Όλα αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν στοιχεία υπολογιστικής γεωμετρίας, γραφικά υπολογιστών και αλγορίθμους της επιστήμης των υπολογιστών. Άλλες εφαρμογές των προβλημάτων κάλυψης χρησιμοποιούνται για:

- Σχεδιασμό διαδρομής για GPS, προσδιορισμό τοποθεσίας, ταχύτητας και κατεύθυνσης.
- Σχεδιασμό ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.
- Σχεδίαση και κατασκευή εξαρτημάτων για αυτοκίνητα, πλοία και αεροσκάφη.
- Υπολογιστική όραση για τον προσδιορισμό των οπτικών γραμμών και το σχεδιασμό ειδικών εφέ σε ταινίες.
- Ρομποτική και προγραμματισμό κίνησης και ορατότητας.

Ένας από τους κύριους στόχους στη ρομποτική είναι η δημιουργία ρομπότ που να μπορούν να μιμούνται την ανθρώπινη συμπεριφορά, σημαντικό χαρακτηριστικό της οποίας είναι οι αισθητήρες κίνησης και η πλοήγηση. Τα ρομπότ με αυτές τις δυνατότητες θα μπορούν να εντοπίζονται σε ένα νέο περιβάλλον, κάτι που θα έλυσε χιλιάδες προβλήματα σε πολλούς τομείς. Ένα από τα πιο απλά προβλήματα, σαν τα παραπάνω, είναι η φύλαξη μιάς γκαλερί τέχνης, που θεωρείται ένα από τα παλαιότερα και πιο βασικά πρόβλημα στην τοποθέτηση των αισθητήρων. [8]

2 Το πρόβλημα art gallery

Στα δίκτυα αισθητήρων, οι αισθητήρες μπορούν να επικοινωνούν πληροφορίες μέσω ενός ad-hoc δικτύου που αλλάζει δυναμικά με το χρόνο. Για να κατανοήσουμε το γενικό πλαίσιο αυτού του συνόλου τοπικών μετρήσεων και διαδρομών επικοινωνίας, είναι χρήσιμο να κατανοήσουμε την τοπολογία ενός χώρου, στην προκειμένη περίπτωση ενός πολυγώνου. Σε αυτή την ενότητα διερευνούμε το πρόβλημα της *art gallery* που στοχεύει να βρει τον ελάχιστο αριθμό φρουρών που απαιτούνται για την κάλυψη μιας γκαλερί τέχνης που έχει σχήμα πολυγώνου n κορυφών.

Το θεώρημα της *art gallery* του Václav Chvátal, (από τον οποίο πήρε το όνομά του), βρίσκει ένα ανώτερο όριο στον ελάχιστο αριθμό φρουρών. Δηλώνει ότι $\lceil n/3 \rceil$ φύλακες (φρουροί) είναι πάντα επαρκείς και μερικές φορές απαραίτητοι για τη φύλαξη ενός απλού πολυγώνου με n κορυφές. Το ερώτημα για το πόσοι φύλακες χρειαζόνταν τέθηκε στον Chvátal από τον Victor Klee το 1973. Ο Chvátal το απέδειξε λίγο αργότερα. Η απόδειξη του Chvátal απλοποιήθηκε αργότερα από τον Steve Fisk, μέσω του θεωρήματος των 3 χρωμάτων.

2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Το πρόβλημα τέθηκε για πρώτη φορά στον Václav Chvátal από τον Victor Klee το 1973 και διατυπώθηκε ως εξής: Σκεφτείτε μια γκαλερί τέχνης, σαν ένα πολυγωνικό δωμάτιο, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων που χρειάζονται ως φύλακες για την προστασία αυτού του δωματίου; Με γεωμετρικούς όρους, το πρόβλημα διατυπώνεται: δεδομένου ενός απλού πολυγώνου n -κορυφών, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός φυλάκων που απαιτούνται ώστε αυτοί να βλέπουν κάθε σημείο του εσωτερικού του πολυγώνου; Ο Chvátal ήταν σε θέση να αποδείξει ότι για απλά πολύγωνα n κορυφών είναι απαραίτητοι και επαρκείς $\lceil n/3 \rceil$ φύλακες για τη φύλαξη της γκαλερί. Ωστόσο, αυτή η απόδειξη ήταν πολύ περίπλοκη και χρησιμοποιούσε τη μέθοδο της επαγωγής. Το 1978 ο Steve Fisk κατασκεύασε μια πολύ απλούστερη απόδειξη μέσω «τριγωνισμού» η οποία είναι μια μέθοδος αποσύνθεσης του πολυγώνου σε τρίγωνα και χρωματισμού των κορυφών τους. Οι πολλές πραγματικές εφαρμογές αυτού του προβλήματος ενέπνευσαν την κοινότητα των μαθηματικών να φανταστούν πολλές παραλλαγές του, μοντελοποιώντας πραγματικές καταστάσεις και νέα προβλήματα. [8]

Μία από τις επεκτάσεις του *art gallery problem* είναι ο χρωματισμός ο οποίος στοχεύει στον καθορισμό του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων που απαιτούνται ώστε να χρωματιστεί ένα σύνολο φυλάκων στο σύνολο των κορυφών του n -γώνου. Ένα σύνολο φυλάκων χρωματίζεται έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο φύλακες με επικαλυπτόμενες περιοχές ορατότητας που να έχουν το ίδιο χρώμα. Ένα κατώφλι για αυτό το πρόβλημα εντοπίστηκε από τους Erickson και LaValle το 2010, οι οποίοι δήλωσαν ότι για οποιαδήποτε τιμή k , υπάρχει ένα πολύγωνο με $3k^2 + 2$ κορυφές έτσι ώστε ο ελάχιστος αριθμός

των φρουρών που χρειάζονται να είναι k . Επιπλέον, οι Erickson και LaValle κατέληξαν ότι για ένα σπειροειδές πολύγωνο ο χρωματικός αριθμός έχει άνω όριο το 2. [9]

2.2 Το θεώρημα επαρκών φυλάκων κάλυψης

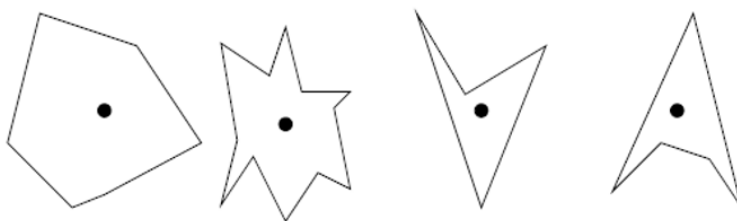
Ένα απλό πολύγωνο (n -γωνο) είναι μια συνδεδεμένη κλειστή περιοχή το όριο της οποίας (περίμετρος) καθορίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων. Το πρόβλημα της γκαλερί τέχνης διατυπώνεται στην γεωμετρία ως ο ελάχιστος αριθμός των φυλάκων που πρέπει να τοποθετηθούν στις κορυφές ενός απλού n -γώνου έτσι ώστε όλα τα σημεία του εσωτερικού να είναι ορατά από αυτούς. Η ορατότητα είναι επιβεβλημένη έτσι ώστε δύο σημεία u και v να είναι αμοιβαία ορατά εάν το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται μέσα στο πολύγωνο. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους ορισμούς, ο Steve Fisk μπόρεσε να αποδείξει το αρχικό θεώρημα του Chvátal χρησιμοποιώντας «τριγωνισμό» και «χρωματισμό κορυφών».

Θεώρημα 1: $n/3$ φυλάκες είναι περιστασιακά απαραίτητοι και πάντα επαρκείς προκειμένου να καλύψουν ένα n -γωνο (ένα πολύγωνο n κορυφών).

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

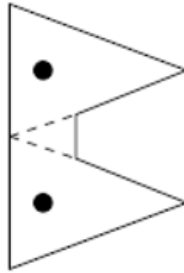
Ξεκινάμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1 εξετάζοντας μερικά παραδείγματα πολυγώνων και τον αντίστοιχο αριθμό φυλάκων που είναι απαραίτητοι για να διασφαλιστεί ότι ολόκληρη η περιοχή είναι καλυμμένη. Στη συνέχεια εισάγουμε τον χωρισμό σε τρίγωνα και τον χρωματισμό των κορυφών (κάθε κορυφή με άλλο χρώμα από τη γειτονική της) για να βρούμε το γενικευμένο όριο του θεωρήματος.

1^η περίπτωση (Βασική): Απαιτείται μόνο ένας φύλακας:



Εικόνα 3 Α) κυρτό πολύγωνο, Β), Γ), Δ), μη κυρτά πολύγωνα

2^η Περίπτωση: Απαιτούνται δύο φύλακες:



Εικόνα 4 Πολύγωνο 6 – πλευρών

Τώρα γενικεύοντας θα προσδιορίσουμε τον αριθμό των φρουρών που απαιτούνται για ένα πολύγωνο n -κορυφών. Πρώτα θα πρέπει να χωρίσουμε σε τρίγωνα το πολύγωνο (τριγωνοποίηση). Για αυτό σχεδιάζουμε το πολύ $n - 3$ μη διασταυρούμενες διαγωνίους μεταξύ των γωνιών του πολυγώνου μέχρις ότου όλη η περιοχή να αποτελείται από τρίγωνα.

Πρόταση 1: Το γράφημα που παράγεται κατά τον χωρισμό ενός πολυγώνου σε τρίγωνα είναι 3-χρωματίσιμο (δηλ. απαιτούνται 3 διαφορετικά χρώματα ώστε κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό χρώμα από τη γειτονική της).

Απόδειξη (Αποδεικνύουμε αυτή την πρόταση με επαγωγή).

1^ο βήμα: Για $n = 3$ (βασική περίπτωση) το πολύγωνο είναι τρίγωνο και προφανώς ισχύει η Πρόταση 1.

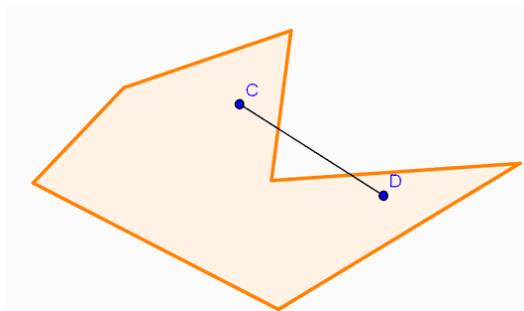
2^ο βήμα: Ας υποθέσουμε τώρα ότι $n > 3$. Ζωγραφίζουμε ένα σύνολο $n - 3$ διαγωνίων που δεν διασταυρώνονται σε κάποια γωνία του πολυγώνου, μέχρις ότου ολόκληρο το πολύγωνο να χωριστεί σε τρίγωνα. Επιλέγουμε δύο κορυφές u και v που είναι συνδεδεμένες μέσω μιάς διαγωνίου. Αυτή η διαγώνιος χωρίζει το πολύγωνο σε δύο τομείς, όπου και οι δύο μοιράζονται την ακμή uv . Μπορούμε να συνεχίσουμε να συνδέουμε δύο κορυφές μέσω διαγωνίων μέσα σε κάθε τομέα, έτσι ώστε να καταλήξουμε σε τρίγωνα που καλύπτουν την όλη περιοχή του πολυγώνου. Έτσι, μπορούμε να ξεκινήσουμε τον χρωματισμό του πολυγώνου εκχωρώντας ένα χρώμα στην κορυφή u και άλλο χρώμα στην κορυφή v . Στη συνέχεια χρωματίζουμε την τρίτη κορυφή που βρίσκεται δίπλα σε αυτές τις δύο με το τρίτο χρώμα. Τέλος, αφού ολόκληρο το πολύγωνο είναι τριγωνικό, με επαγωγή μπορούμε να χρωματίσουμε το καθένα τρίγωνο με την ίδια διαδικασία. □

Εφόσον υπάρχουν n κορυφές, βάσει της πρότασης 1 γνωρίζουμε ότι ένα από τα χρώματα περιέχεται το πολύ σε $n/3$ κορυφές. Έτσι, επιλέγοντας ένα χρώμα και τοποθετώντας τον φρουρό στην κορυφή του, ο μέγιστος αριθμός φρουρών (φυλάκων) είναι $n/3$. Δεδομένου ότι κάθε ένα από τα τρίγωνα περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή αυτού του χρώματος, αυτό σημαίνει ότι κάθε τρίγωνο φυλάσσεται και έτσι φυλάσσεται ολόκληρο το πολύγωνο. [10] □

Παραπάνω υποθέσαμε ότι σε όλα τα γραφήματα γίνεται χωρισμός σε τρίγωνα ωστόσο πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό επιτυγχάνεται πάντα. Γενικά, δεν γίνεται πάντα, ιδιαίτερα στις τρισδιάστατες

περιοχές. Ωστόσο, στο πρόβλημα της art gallery έχουμε να κάνουμε μόνο με επίπεδα κυρτά ή μη κυρτά πολύγωνα και έτσι θα αποδείξουμε ότι πράγματι για τέτοια γεωμετρικά σχήματα επιτυγχάνεται πάντα ο χωρισμός τους σε τρίγωνα. Στα κυρτά πολύγωνα ο τριγωνισμός γίνεται πολύ εύκολα, για αυτό το ενδιαφέρον εστιάζεται στα μη κυρτά πολύγωνα. [10]

Πρόταση 2: Κάθε επίπεδο μη κυρτό πολύγωνο μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα.



Εικόνα 5 Μη κυρτό 6 – γωνο.

Απόδειξη (με επαγωγή).

Για τη βασική περίπτωση $n = 3$ έχουμε τρίγωνο οπότε η Πρόταση 2 προφανώς ισχύει. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $n \geq 4$. Για να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική διαδικασία, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μια διαγώνιος που χωρίζει το πολύγωνο σε δύο μέρη, καθένα από τα οποία μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα. Έστω ότι φέρουμε μία διαγώνιο που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη. Όπως γνωρίζουμε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός πολυγώνου είναι $(n - 2) \cdot 180^\circ$ και κάθε κυρτή γωνία έχει μέτρο μικρότερο από 180° . Επίσης λόγω της αρχής *pigeonhole* (όπου σύμφωνα με αυτή την αρχή (Εικόνα 6) εάν n αντικείμενα τοποθετηθούν σε m δοχεία με $n > m$, τότε τουλάχιστον ένα δοχείο πρέπει να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία) θα πρέπει να υπάρχει μια κυρτή κορυφή στο πολύγωνο. (Στην παρακάτω εικόνα για να τοποθετήσουμε 10 περιστέρια σε 9 κουτιά (και αφού $10 > 9$) τοποθετούμε 2 περιστέρια στην πρώτη θέση – πάνω αριστερά)

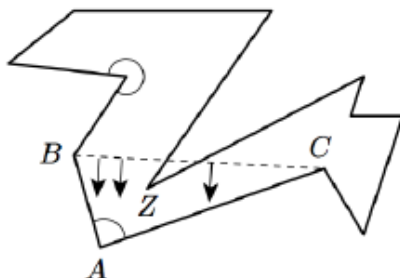


Εικόνα 6 Pigeonhole

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συλλογιστική αυτή για να βρούμε ένα πιο στενό όριο στον αριθμό των κυρτών κορυφών, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Εάν υπήρχαν

λιγότερες από δύο κυρτές κορυφές (δηλαδή μία), τότε θα υπήρχαν τουλάχιστον $(n - 1)$ μη κυρτές κορυφές, οπότε οι εσωτερικές γωνίες θα άθροιζαν σε τουλάχιστον $(n - 1) \cdot 180^\circ$, που είναι μεγαλύτερο από $(n - 2) \cdot 180^\circ$ που είναι **άτοπο**. Αν υπήρχαν ακριβώς δύο κυρτές κορυφές τότε θα υπήρχαν ακριβώς $(n - 2)$ μη κυρτές κορυφές και στην περίπτωση αυτή οι εσωτερικές γωνίες θα άθροιζαν σε τουλάχιστον $(n - 2) \cdot 180^\circ$, αφήνοντας δύο κορυφές που πρέπει να είναι μεγαλύτερες του 0. Έτσι, πάλι το άθροισμα θα ήταν μεγαλύτερο από το $(n - 2) \cdot 180^\circ$, που είναι πάλι **άτοπο**. Ωστόσο, με τρεις κυρτές κορυφές, υπάρχουν άλλες $(n - 3)$ μη κυρτές κορυφές που έχουν άθροισμα τουλάχιστον $(n - 3) \cdot 180^\circ$, αφήνοντας ακριβώς 180° για τις υπόλοιπες 3 κορυφές, που ισχύει πάντα σε κάθε τρίγωνο. Συμπερασματικά, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον τρεις κυρτές κορυφές.

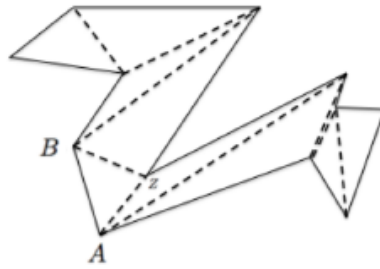
Στη συνέχεια επιλέγουμε μία από τις κυρτές κορυφές (έστω την A όπως φαίνεται στην Εικόνα 7) του πολυγώνου και δημιουργούμε μια διαγώνιο συνδέοντας τις δύο γειτονικές κορυφές του B και C. Εάν αυτή η διαγώνιος βρίσκεται πλήρως στο εσωτερικό του πολυγώνου τότε αυτή θα είναι η διαγώνιος που αναζητούμε. Ωστόσο, εάν αυτή η διαγώνιος δεν βρίσκεται πλήρως μέσα στο πολύγωνο, τότε τη σύρουμε προς την κυρτή κορυφή μέχρι να φτάσει στην πρώτη κορυφή που είναι η επόμενη. Στη συνέχεια δημιουργούμε μια διαγώνιο (διακεκομμένη γραμμή) μεταξύ της κυρτής κορυφής και αυτής της νέας κορυφής. Τώρα που έχουμε βρει την διαγώνιο μπορούμε να εφαρμόσουμε επαγωγή για να χωρίσουμε το υπόλοιπο πολύγωνο σε τρίγωνα και έτσι αποδεικνύεται ότι πάντα εφαρμόζεται αυτή η διαδικασία.[10] □



Εικόνα 7 Πολύγωνο 12 πλευρών (Διαδικασία τριγωνισμού)

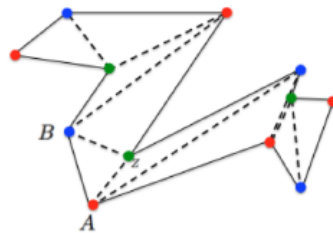
2.3 Παράδειγμα τριγωνισμού και χρωματισμού πολυγώνου

Ας εφαρμόσουμε τώρα αναλυτικά τις τεχνικές τριγωνισμού και χρωματισμού κορυφών ξεκινώντας με το γράφημα που φαίνεται παραπάνω. Έστω ότι διαλέγουμε την κυρτή κορυφή A και δημιουργούμε τη διαγώνιο μεταξύ των δύο γειτονικών της κορυφών B και Γ. Επειδή η διαγώνιος δεν είναι πλήρως μέσα στο πολύγωνο την μετατοπίζουμε μέχρι να φτάσει στην πρώτη κορυφή που είναι η Z. Έτσι, δημιουργούμε μία διαγώνιο από το A έως το Z. Χρησιμοποιώντας αυτή την πρώτη διαγώνιο μπορούμε στη συνέχεια να «τριγωνίσουμε» περαιτέρω το πολύγωνο (Εικόνα 8)



Εικόνα. 8 12 - πλευρο πολύγωνο χωρισμένο σε τρίγωνα

Με τη βοήθεια του «τριγωνισμού» μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του πολυγώνου όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 9).



Εικόνα 9 Χρωματισμός 12-γώνου

Κοιτάζοντας την έγχρωμη Εικόνα 9, μπορούμε να επιλέξουμε τις πράσινες κορυφές ως φύλακες, καθορίζοντας έτσι τον ελάχιστο αριθμό φυλάκων (φρουρών) που είναι απαραίτητοι για την φύλαξη αυτής της art gallery. Σε καθένα από τα τρίγωνα που χωρίστηκε το δωδεκάγωνο υπάρχει μια πράσινη κορυφή οπότε χρειαζόμαστε 3 φρουρούς για να φυλάσσεται κάθε τρίγωνο και αναλογικά να φυλάσσεται όλο το πολύγωνο. Η απαίτηση για $\lceil n/3 \rceil$ φύλακες του 12-γώνου επαληθεύεται καθώς βάσει της θεωρίας θα χρειαζόμασταν το πολύ 4 φύλακες (αφού το ένα τρίτο του 12 είναι το 4)

3 Επέκταση του art gallery problem – Χρωματισμός

Η πρώτη επέκταση του art gallery problem ενισχύει το αρχικό πρόβλημα με τον καθορισμό του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό ενός συνόλου φυλάκων S , έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο φύλακες με επικαλυπτόμενες περιοχές ορατότητας που να έχουν το ίδιο χρώμα.

3.1 Καθορισμός ελάχιστου αριθμού χρωμάτων

Το πρόβλημα: Δεδομένου ενός συνόλου S κορυφών, ενός κυρτού πολυγώνου P και των ορατών περιοχών κάθε κορυφής (φύλακες), να καθορίσετε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτούνται έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο φρουροί των οποίων οι επικαλυπτόμενες ορατές περιοχές να μοιράζονται το ίδιο χρώμα.

Έστω ότι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που είναι απαραίτητα για να χρωματίσουμε αυτό το σύνολο συμβολίζεται με $C(S)$. Η ορατότητα μιας κορυφής v (συμβολίζεται με $V(v)$) και αποτελείται από όλα τα σημεία p στο πολύγωνο, έτσι ώστε το p να είναι ορατό από το v . Έτσι, δύο κορυφές u και v θεωρούνται αλληλοκαλυπτόμενες αν $V(u) \cap V(v) \neq \emptyset$. Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται για να χρωματίσουμε ένα σύνολο φρουρών (φυλάκων), του συνόλου των κορυφών του πολυγώνου (συμβολίζεται με $T(P)$) και ορίζεται ως $\chi_G(P) = \min_{S \in T(P)} C(S)$. Αυτή η τιμή ονομάζεται «χρωματικός αριθμός κορυφών του πολυγώνου P ». [11]

Θεώρημα 2: Για κάθε θετικό ακέραιο k , υπάρχει ένα πολύγωνο P με $3k^2 + 2$ κορυφές τέτοιες ώστε: $\chi_G(P) \geq k$

Απόδειξη: Ξεκινάμε αυτή την απόδειξη θεωρώντας ένα πολύγωνο που μοιάζει με μία χτένα (Εικόνα 10) και το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για να δείξει την περιστασιακή αναγκαιότητα των $\lceil n/3 \rceil$ φρουρών στο αρχικό πρόβλημα art gallery. Αυτό το πολύγωνο αποτελείται από $3k^2 + 2$ κορυφές, έχοντας μια ορθογώνια περιοχή και k^2 προεξοχές (εξογκώματα) προσαρτημένα στο κάτω μέρος του ορθογωνίου. Χρησιμοποιώντας αυτή τη γενική κατασκευή, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολύγωνο P με τις ακόλουθες συντεταγμένες: $[(0, 1), (1, 0), (2, 1), (4, 2), (5, 0), (6, 1), \dots, (4k^2 - 4, 1), (4k^2 - 3, 0), (4k^2 - 2, 1), (4k^2 - 2, 2k-2), (0, 2k - 2)]$. Η ορθογώνια περιοχή περιλαμβάνει τις τέσσερις γωνίες: $(0, 1), (4k^2 - 2, 1), (4k^2 - 2, 2k - 2), (0, 2k - 2)$.



Εικόνα 10 29-γώνο (για $k=3$) με 9 προεξοχές, s_1 σωματοφύλακας, s_2 φύλακας κορυφής

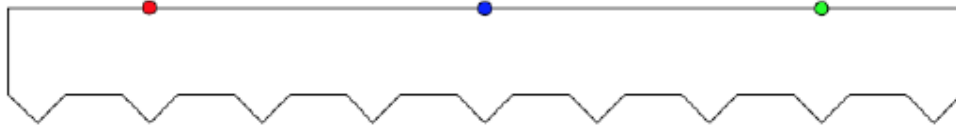
Τώρα πρέπει να καθορίσουμε πού μπορούμε να τοποθετήσουμε τους φύλακες σε αυτό το πολύγωνο έτσι ώστε όλο το πολύγωνο να φυλάσσεται. Ας πάρουμε φύλακες των οποίων η τεταγμένη $\gamma < 1$ ως «φύλακες κορυφής» (m_{apex}) και αυτούς με $\gamma \geq 1$ ως «σωματοφύλακες». Διαισθητικά, οι φύλακες κορυφής μπορούν να τοποθετηθούν πάνω από μία μεμονωμένη προεξοχή της «χτένας», έτσι ώστε να προστατεύουν μόνο μία. Ωστόσο, αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα να παρεμβαίνουν πολλοί φύλακες και έτσι θα αυξανόταν ο χρωματικός αριθμός των φυλάκων κάτι που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Ο στόχος είναι να τοποθετηθούν φρουροί κορυφής έτσι ώστε να μην παρεμβαίνουν και να μπορούν να καλύψουν περισσότερα από ένα «δόντια», ελαχιστοποιώντας έτσι τον χρωματικό αριθμό φρουρών. Ας υποθέσουμε ότι ένας φύλακας κορυφής είναι τοποθετημένος στο κέντρο της προεξοχής $(1, 0)$, τότε το εύρος ορατότητάς του θα οριοθετηθεί από την ακτίνα που εκτείνεται από το δεξιότερο τοίχωμα της. Αυτή η ακτίνα, χρησιμοποιώντας βασική τριγωνομετρία, θα τμήσει το πάνω μέρος της ορθογώνιας περιοχής σε απόσταση $2k - 2$ από το κέντρο της προεξοχής η γωνία από το κέντρο είναι 45° και το ύψος είναι $2k - 2$). Αυτό σημαίνει επίσης ότι ο πλησιέστερος επικαλυπτόμενος φύλακας θα είναι επίσης σε θέση να φυλάσσει απόσταση $2k - 2$ σε οριζόντιο μήκος και έτσι θα είναι κεντραρισμένος σε μία προεξοχή $4k - 4$ μακρύτερα. Έτσι, δύο φύλακες θα επικαλύπτονται αν η απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων προεξοχών τους είναι το πολύ $4k$. Στη συνέχεια ορίζουμε ως διαδοχικές προεξοχές το σύνολο αυτών που η μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων κορυφής που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε δύο από αυτές είναι $4k$. Ορίζουμε ως m_{apex} τον μέγιστο αριθμό φυλάκων κορυφής σε οποιοδήποτε διαδοχικό σύνολο k προεξοχών (s_2 στην Εικόνα 10).

Οι «σωματοφύλακες» από την άλλη πλευρά, είναι σε θέση να προστατεύουν έως και k διαφορετικές προεξοχές αφού δύο μη επικαλυπτόμενοι φύλακες πρέπει να τοποθετούνται σε απόσταση τουλάχιστον $4k$ μεταξύ τους (αφού τα εξογκώματα απέχουν μεταξύ τους 4 μονάδες), όπως ορίστηκε νωρίτερα στην κατασκευή της «χτένας». Η ορατότητα ενός «σωματοφύλακα» περιλαμβάνει ολόκληρη την ορθογώνια περιοχή του πολυγώνου και η ορατότητα κάθε «φύλακα κορυφής» περιλαμβάνει την ορθογώνια περιοχή, έτσι ώστε όλοι οι «σωματοφύλακες» να μην επικαλύπτονται με όλους τους άλλους φύλακες στο πολύγωνο. Επίσης ορίζουμε ως m_{body} τον αριθμό των «σωματοφυλάκων» που χρησιμοποιούνται στο σύνολο φυλάκων του πολυγώνου (s_1 στην Εικόνα 10).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πολύγωνο P έχει ένα σύνολο φρουρών S που απαιτεί μόνο $\chi_G(P)$ χρώματα. Αν θεωρήσουμε k διαδοχικές προεξοχές στο P με m_{apex} φρουρούς κορυφής, τότε όλοι οι φρουροί κορυφής θα επικαλύπτονται μεταξύ τους και καθένας από αυτούς θα επικαλύπτεται με όλους τους «σωματοφύλακες» m_{body} . Έτσι, αυτό σημαίνει ότι $\chi_G(P) \geq m_{apex} + m_{body}$. Όπως ορίστηκε νωρίτερα, κάθε σωματοφύλακας μπορεί να φυλάσσει το πολύ k προεξοχές και υπάρχουν συνολικά k^2 προεξοχές, επομένως σύμφωνα με την αρχή *pigeonhole* οι φύλακες κορυφής μπορούν να φυλάσσουν το πολύ km_{apex} προεξοχές. Επιπλέον, αφού κάθε προεξοχή πρέπει να φυλάσσεται θα έχουμε

$$km_{apex} + km_{body} \geq k^2 \rightarrow m_{apex} + m_{body} \geq k, \text{ και επομένως } \chi_G(P) \geq m_{apex} + m_{body} \geq k. \quad \square$$

Ένα παράδειγμα αυτού του χρωματισμού φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 11)

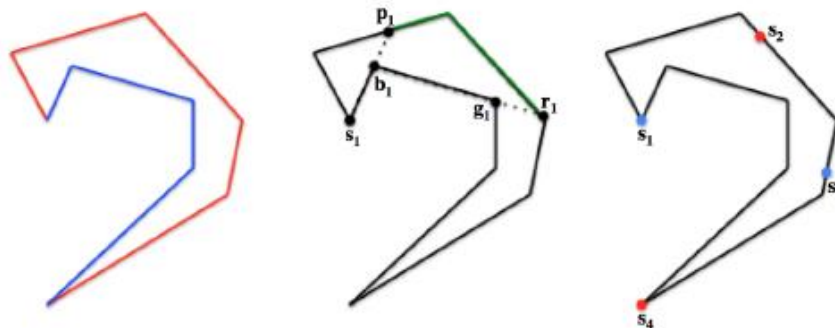


Εικόνα 11 Κάλυψη τριών φυλάκων (τρία χρώματα)

3.2 Ανώτερα όρια για το Chromatic Art Gallery Problem

Εκτός από τον προσδιορισμό του κατώτερου ορίου για το πρόβλημα των χρωμάτων που αναλύθηκε παραπάνω, οι Erickson και LaValle καθόρισαν επίσης τα ανώτερα όρια των χρωμάτων (των φυλάκων). Το προφανές άνω φράγμα είναι $\lceil n/3 \rceil$ για ένα n -γωνο, όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 2, για κάθε φρουρό να χρωματίζεται με ένα μοναδικό χρώμα. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά πολύγωνα με μεγάλο αριθμό κορυφών των οποίων η «χρωματική φύλαξη» είναι ο αριθμός 2, επομένως το παραπάνω όριο $\lceil n/3 \rceil$ δεν είναι ικανοποιητικό

Έτσι, οι Erickson και LaValle απέδειξαν καλύτερα όρια (για σπειροειδή πολύγωνα).



Εικόνα 12 Κάλυψη ενός σπειροειδούς πολύγωνα

Θεώρημα 3: Για οποιοδήποτε σπειροειδές πολύγωνο P ισχύει: $\chi_G(P) \leq 2$.

Περιγραφική Απόδειξη: Εξ' ορισμού το σπειροειδές πολύγωνο αποτελείται ακριβώς από μία κυρτή πολυγωνική γραμμή (Εικόνα 12, αριστερό σχήμα, κόκκινη γραμμή) και την κυρτή αντανάκλασή της (Εικόνα 12, αριστερό σχήμα, μπλε γραμμή). Οι φύλακες τοποθετούνται πάνω στην κυρτή γραμμή. Ο πρώτος φρουρός τοποθετείται στην αρχή της κυρτής γραμμής (s_1 μεσαίο σχήμα Εικόνα 12) και καλύπτει την περιοχή έως την διακεκομμένη γραμμή που ενώνει το b_1 με το P_1 . Η ορατότητά του καθορίζεται από τα περισσότερα σημεία που κινούνται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα) πάνω στην κυρτή γραμμή P_n και από τα σημεία που κινούνται με την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφα) κατά μήκος της αντανάκλασής της, b_n . Κατόπιν θεωρούμε g_n να είναι η επόμενη κορυφή (κινούμενοι δεξιόστροφα) από το b_n και φέρνουμε την ευθεία που τις ενώνει μέχρι να

τμήσουμε την κυρτή γραμμή στο r_n . Τέλος τοποθετούμε τον επόμενο φρουρό στο διάστημα ανάμεσα στα P_n και r_n . (Εικόνα 12 δεξιό σχήμα, ο φρουρός τοποθετείται στο s_2). Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία τοποθετούμε και τους υπόλοιπους φρουρούς (s_3 και s_4 αντίστοιχα στο δεξιό σχήμα Εικόνα 12). Οι φρουροί πλέον μπορούν να χρωματισθούν με βάση τον δείκτη τους, για παράδειγμα με κόκκινο αυτοί με τους ζυγούς δείκτες s_2 και s_4 και με μπλε αυτοί με μονό δείκτη s_1 και s_3 . Προφανώς απαιτούνται 2 το πολύ χρώματα (Εικόνα 12, δεξιό σχήμα) όπως προέβλεπε το παραπάνω θεώρημα. \square

4 Το πρόβλημα του κινούμενου φύλακα

Μια άλλη επέκταση του αρχικού προβλήματος της γκαλερί τέχνης είναι η χαλάρωση των περιορισμών έτσι ώστε οι φύλακες να είναι πλέον κινητοί, κάτι που εισήχθη για πρώτη φορά από τους Toussaint και Avis το 1981 ως «πρόβλημα της διαδρομής του φύλακα». Μια διαδρομή του φύλακα W ενός πολυγώνου P ορίζεται γενικά ως μία καμπύλη στο εσωτερικό του P έτσι ώστε το W να καλύπτει όλο το P . Το πρόβλημα αυτό στοχεύει στον εντοπισμό της βέλτιστης διαδρομής του φύλακα για την οποία ένα πολύγωνο είναι καλυμμένο με την προϋπόθεση ότι η βέλτιστη αυτή διαδρομή να είναι και η συντομότερη διαδρομή. Επομένως, αυτό το πρόβλημα δεν επικεντρώνεται μόνο στη γεωμετρική έννοια της ορατότητας, αλλά επίσης εστιάζει στον καθορισμό ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Ο πρώτος πολυωνυμικός αλγόριθμος χρόνου για την εύρεση της συντομότερης διαδρομής του φύλακα καθορίστηκε από τους Carlsson, Jonsson και Nilsson [12] και εκτελείται στη χειρότερη περίπτωση σε $O(n^6)$ χρόνο, αλλά είναι προσαρμοστικός, με την έννοια ότι τρέχει πιο γρήγορα σε πολύγωνα με απλή δομή.

4.1 Περιγραφή του προβλήματος – σύγχρονες προσεγγίσεις

Το πρόβλημα της art gallery ανήκει στην κατηγορία των NP-Complete προβλημάτων. Αυτά γενικά, είναι προβλήματα για τα οποία η ορθότητα κάθε λύσης τους μπορεί να επαληθευτεί γρήγορα μέσω ενός αλγορίθμου που δοκιμάζει όλες τις πιθανές λύσεις. Επίσης μπορεί να χωριστεί σε υποπροβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο. [13], [14]. Ουσιαστικά, όπως περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, αποτελεί την εύρεση του μικρότερου συνόλου φρουρών (φυλάκων) που βρίσκονται εντός ενός απλού πολυγώνου (στην περίμετρο ή στο εσωτερικό του) έτσι ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου να είναι ορατό από τουλάχιστον έναν φρουρό.

Την ίδια στιγμή υπάρχουν πολλά παραδείγματα προβλημάτων βελτιστοποίησης καθώς και παρόμοια προβλήματα συντομότερης διαδρομής (για παράδειγμα, το πρόβλημα του ταξιδιώτη πωλητή - *the Traveling Salesman Problem*).

Το συνδυαστικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: να βρεθεί η συντομότερη κλειστή καμπύλη (διαδρομή φύλακα) σε ένα απλό πολύγωνο έτσι ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου να είναι ορατό από τουλάχιστον ένα σημείο της καμπύλης. Αυτό φαίνεται να είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο τα δύο παραπάνω. Έτσι θεωρήθηκε εξαιρετική η πρόταση των Chin και Ntafos, οι οποίοι ισχυρίστηκαν ότι ήταν δυνατόν να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή φύλακα, που αναγκάζεται να περάσει από δεδομένο σημείο του πολυγώνου, σε πολυωνυμικό χρόνο [15]. Χρησιμοποιώντας παραλλαγές του αρχικού αλγορίθμου οι χρόνοι εκτέλεσης βελτιώθηκαν από τον Tan et al. [17], [18]. Ένα σφάλμα που σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις οδήγησε σε εκθετικούς χρόνους εκτέλεσης σε όλους τους προηγούμενους αλγορίθμους που είχαν προταθεί, ανακαλύφθηκε από τους Hammar και Nilsson [19] και έτσι προτάθηκε μια πιθανή λύση. Ωστόσο, η προτεινόμενη λύση, μείωνε μόνο τις περιπτώσεις εκείνες που είχαν εκθετική συμπεριφορά. Πρόσφατα, οι Tan et al. [20] παρουσίασαν έναν βελτιωμένο

αλγόριθμο που βασίζεται στις αρχικές τεχνικές που σε συνδυασμό με δυναμικό προγραμματισμό αφαιρεί την εκθετική συμπεριφορά από όλες τις περιπτώσεις. Αυτός ο αλγόριθμος εκτελείται στη χειρότερη περίπτωση σε $O(n^4)$ χρόνο.

Οι περιορισμοί, πολλές φορές, ενισχύουν τη δυσκολία του προβλήματος. Σε ορισμένες πρακτικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στην περιπολία ενός κτιρίου από ρομπότ που πρέπει να εισέλθει σε αυτό από μια πόρτα, ο περιορισμός αυτός είναι ήσσονος σημασίας. Σε άλλες περιπτώσεις όμως, όπως σε προβλήματα φωτισμού, ο περιορισμός της διαδρομής του φύλακα ώστε αυτή να περάσει μέσω ενός συγκεκριμένου σημείου μπορεί να είναι καταστροφικός, καθώς η διαδρομή αυτή μπορεί να καταστεί αρκετά μεγαλύτερη από τη συντομότερη διαδρομή, όταν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζουμε πως μειώνεται το αρχικό πρόβλημα σε ένα πολυωνυμικό αριθμό προβλημάτων συντομότερης διαδρομής του φύλακα με σταθερό σημείο στην περίμετρό του, χρησιμοποιώντας έναν υπάρχοντα αλγόριθμο. Έτσι μαζί με μια τεχνική σάρωσης που ονομάζεται "*sliding*", μπορεί να κατασκευαστεί η συντομότερη διαδρομή φύλακα που εκτελείται στη χειρότερη περίπτωση σε $O(n^6)$ χρόνο (σε πολλά πολύγωνα όμως, ο αλγόριθμος μπορεί να εκτελείται πιο γρήγορα).

4.2 Εισαγωγικές έννοιες – Ορισμοί- Μεθοδολογία

Έστω P ένα απλό πολύγωνο με n πλευρές. Υποθέτουμε μια αναπαράσταση του P ως μια λίστα των συντεταγμένων των κορυφών όπως αυτές συναντώνται κατά την αριστερόστροφη σάρωση της περιμέτρου του P . Αυτή η αναπαράσταση υποδηλώνει έναν προσανατολισμό στις πλευρές του P και ως εκ τούτου, μπορούμε να πούμε ότι το εσωτερικό του πολυγώνου βρίσκεται (χωρικά) στα αριστερά μιας πλευράς (ακμής).

Ένα σημείο p στο P λέγεται ότι βλέπει ένα σημείο q στο P εάν το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο σημείων περιέχεται στο P . Λέμε επίσης ότι τα δύο σημεία είναι ορατά το ένα από το άλλο. Ενα σύνολο φρουρών του P είναι ένα σύνολο σημείων του P έτσι ώστε για κάθε σημείο p στο P να υπάρχει ένα σημείο q του συνόλου φρουρών που βλέπει το p .

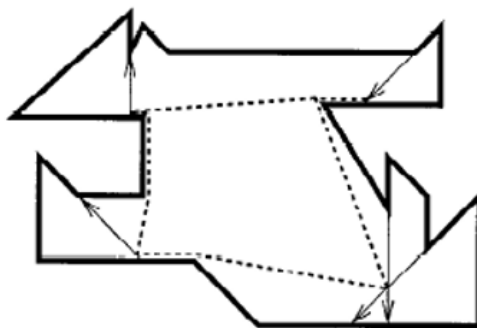
Μια διαδρομή φύλακα είναι μια κλειστή καμπύλη W στο P έτσι ώστε το W να είναι ένα σύνολο φρουρών για το P . Αν καθορίσουμε ένα σημείο d στην περίμετρο του P και αναγκάσουμε τη διαδρομή του φύλακα να περάσει αυτό το σημείο, μιλάμε για μια σταθερή-προκαθορισμένη διαδρομή φύλακα με το σημείο d να είναι η πόρτα της Διαδρομής. Εάν δεν έχει καθοριστεί τέτοιο σημείο, η διαδρομή ονομάζεται τυχαία (ρευστή) διαδρομή φύλακα. Παρακάτω, όταν μιλάμε για διαδρομή φύλακα εννοούμε μια τυχαία διαδρομή φύλακα εκτός αν ορίζεται διαφορετικά.

Δεδομένου ότι ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τη συντομότερη διαδρομή φύλακα, μετράμε το μήκος ως το μέτρο της απόστασης με την τυπική συνάρτηση της Ευκλείδειας απόστασης μεταξύ δύο σημείων p και q που είναι ίσο με την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων σημείων του τμήματος και συμβολίζεται με $\|p, q\|$.

Μια «αλυσίδα» είναι μια καμπύλη που αποτελείται από διαδοχικά τμήματα που δεν είναι συγγραμμικά. Το μήκος μιας αλυσίδας C , που συμβολίζεται με μήκος (C), είναι το άθροισμα των μηκών των τμημάτων του C .

Η συντομότερη διαδρομή φύλακα, είτε τυχαία είτε σταθερή (προκαθορισμένη), αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα εκείνα όπου δεν υπάρχουν μεταξύ τους δύο διαδοχικά τμήματα συγγραμμικά, δηλ. είναι μια «κλειστή αλυσίδα».

Θεωρούμε το παράδειγμα ενός πολυγώνου όπως περιγράφεται στην Εικόνα 13.



Εικόνα 13 Παράδειγμα πολυγώνου με τη συντομότερη διαδρομής φύλακα

Η συντομότερη διαδρομή φύλακα (διακεκομμένη γραμμή) είναι μια διαδρομή πάνω σε (μερικά) σημεία των πλευρών ή στις προεκτάσεις των πλευρών του πολυγώνου (ή σε μερικές από αυτές) που είναι γειτονικές στις «ακούσιες κορυφές». Ο λόγος για αυτό είναι ότι η διαδρομή πρέπει να δει τα πάντα πίσω και πέρα από την κάθε κορυφή του πολυγώνου. Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις προεκτάσεις των πλευρών του πολυγώνου και αυτό μας οδηγεί στους παρακάτω ορισμούς.

Ορίζουμε ως κοπή ως το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα στο P με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Τα τελικά σημεία της κοπής πρέπει να συμπίπτουν με τα περιμετρικά σημεία του P και μέρος του εσωτερικού της κοπής πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου.
- Η πλευρά του πολυγώνου δεν είναι κοπή.
- Μία κοπή χωρίζει το P σε δύο υποπολύγωνα.
- Εάν μια κοπή αντιπροσωπεύεται από το τμήμα $[p, q]$ λέμε ότι η κοπή κατευθύνεται από το p στο q και ονομάζουμε p το σημείο έναρξης της κοπής.

Λέμε ότι ένα σημείο βρίσκεται δεξιά (αριστερά) από μια κοπή εάν το σημείο βρίσκεται χωρικά προς τα δεξιά (αριστερά) εντός του υποπολύγωνα που διαχωρίστηκε από την κοπή.

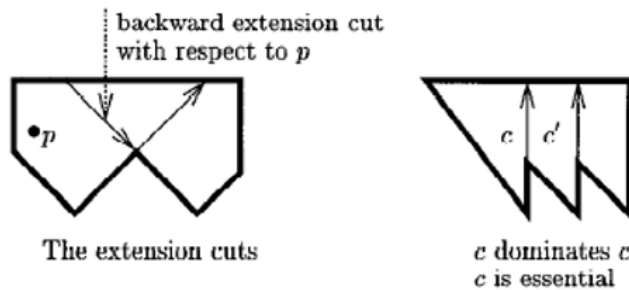
Θεωρούμε μια ακούσια κορυφή του πολυγώνου. Οι δύο πλευρές που συνδέονται στην κορυφή μπορούν να προεκταθούν μέσα στο P έως ότου οι προεκτάσεις φτάσουν σε ένα σημείο της περιμέτρου του P . Τα προεκταθέντα τμήματα έχουν τις ίδιες κατευθύνσεις με τις πλευρές στις οποίες ανήκουν συγγραμμικά.

- Αυτές τις προεκτάσεις που κατασκευάζονται με τον παραπάνω τρόπο τις ονομάζουμε κοπές προέκτασης. (βελάκια Εικ. 13)

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι όλα τα σύνολα φρουρών πρέπει να έχουν ένα σημείο προς τα αριστερά (ή επάνω) σε κάθε κοπή προέκτασης, γιατί διαφορετικά η πλευρά που είναι συγγραμμική με την κοπή δεν θα ήταν ορατή από το αντίστοιχο σύνολο φρουρών (βλέπε Εικόνα 13).

Για να εξηγήσουμε την επόμενη ιδέα, υποθέτουμε ότι ένα σημείο της συντομότερης διαδρομής του φύλακα είναι γνωστό σε εμάς. Έστω αυτό το σημείο συμβολίζεται με p . Αποδεικνύεται ότι δεν χρειάζεται να διατηρηθούν όλες οι κοπές προέκτασης αλλά μόνο αυτές που περιέχουν το σημείο p και επομένως, το κύριο μέρος της διαδρομής του φύλακα βρίσκεται προς τα δεξιά αυτών, αφού είναι εκείνες που εμποδίζουν την ορατότητα από τις αντίστοιχες πλευρές του πολυγώνου (βλέπε Εικ. 13). Επομένως, κάνουμε τον εξής περαιτέρω διαχωρισμό μεταξύ των τύπων των κοπών προέκτασης.

- Με δεδομένο ένα σημείο p ενός πολυγώνου, λέμε ότι μια κοπή προέκτασης c είναι προς τα πίσω σε σχέση με το p αν το p βρίσκεται στα αριστερά της κοπής c . Διαφορετικά το c είναι προς τα εμπρός σε σχέση με το p (βλέπε Εικ. 14 αριστερά).
- Μια κοπή προέκτασης c κυριαρχεί σε μια άλλη κοπή προέκτασης c' αν όλα τα σημεία του P που βρίσκονται στα αριστερά του c βρίσκονται επίσης στα αριστερά του c' (βλέπε Εικ. 14 δεξιά).
- Λέμε ότι μια κοπή προέκταση είναι μια ουσιαστική (βασική) κοπή εάν δεν κυριαρχείται από καμία άλλη κοπή προέκτασης (βλέπε Εικ. 14 δεξιά).



Εικόνα 14 Αναπαράσταση των ορισμών των κοπών

Λήμμα 2.1. (Χωρίς απόδειξη): Μια κλειστή καμπύλη είναι μια διαδρομή φύλακα εάν και μόνο εάν η καμπύλη έχει τουλάχιστον ένα σημείο αριστερά (ή πάνω) κάθε ουσιαστικής κοπής

Μπορούμε να δούμε τις βασικές κοπές να έχουν μια κυκλική σειρά που καθορίζεται από τα σημεία έναρξης των κοπών όπως αυτά συναντώνται κατά την αριστερόστροφη σάρωση της περιμέτρου του πολυγώνου. Με αυτόν τον τρόπο κάθε κοπή έχει έναν προκάτοχο και έναν διάδοχο. Το σύνολο των βασικών κοπών του πολυγώνου P θα συμβολίζεται στο εξής με C .

Θεωρούμε μία ουσιαστική κοπή. Αυτή τέμνεται από το πολύ $k - 1$ άλλες ουσιαστικές κοπές, όπου το k είναι ο συνολικός αριθμός των ουσιαστικών κοπών στο C , και ως εκ τούτου, κάθε τέτοια κοπή υποδιαιρείται σε k το πολύ ευθύγραμμα τμήματα που εκτείνονται μεταξύ των σημείων τομής. Ονομάζουμε αυτά τα τμήματα ως τα θραύσματα μιας κοπής. Όπως και πριν μπορούμε να ορίσουμε την

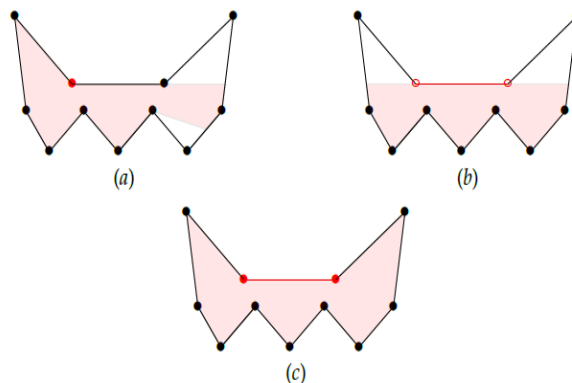
σχέση κυριαρχίας μεταξύ ενός θραύσματος f και μιας κοπής c . Λέμε ότι η f κυριαρχεί στο c εάν η f βρίσκεται προς τα αριστερά του (ή πάνω) στο c . Ως εκ τούτου, ένα θραύσμα μιας κοπής κυριαρχεί στην κοπή.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το πρόβλημα της διαδρομής του συντομότερου φύλακα ως εξής: «Υπολογίστε τη συντομότερη κλειστή καμπύλη που τέμνει όλες τις ουσιαστικές κοπές».

4.2.1 Τύποι κινητών φυλάκων

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των φυλάκων που απαιτούνται για την παρακολούθηση οποιουδήποτε πολυγώνου θα μειωθεί εάν αυξηθεί η περιοχή που μπορεί να παρακολουθήσει κάθε φύλακας. Για να γίνει αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι φύλακες δεν χρειάζεται πλέον να παραμένουν ακίνητοι.

Ένας φύλακας θεωρείται κινητός εάν μπορεί να κινηθεί κατά μήκος μιας πλευράς ή διαγωνίου του πολυγώνου. Θεωρούμε δύο τύπους κινητών φυλάκων, αυτόν της ανοιχτής πλευράς και αυτόν της κλειστής πλευράς [32].



Εικόνα 15 Δύο τύποι κινητών φυλάκων

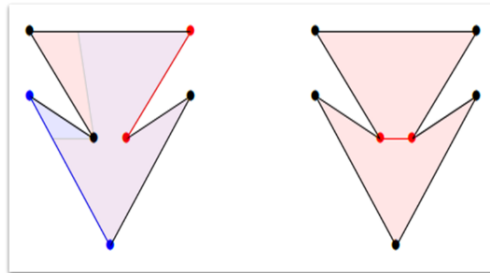
(a) Δεν είναι δυνατό για έναν μόνο ακίνητο φύλακα (κόκκινο σημείο) να παρακολουθεί ολόκληρο το πολύγωνο.

(b) Ο **κινητός** φύλακας **ανοιχτής πλευράς** μπορεί να παρακολουθεί όλα τα σημεία του πολυγώνου που είναι ορατά από οποιοδήποτε σημείο στη διαδρομή περιπολίας του, εξαιρουμένων των τελικών σημείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορεί να κρυφοκοιτάξει στις γωνίες.

(c) Ένας **κινητός** φύλακας **κλειστής πλευράς** μπορεί να δει όλα τα ορατά σημεία από οποιοδήποτε σημείο της διαδρομής της περιπολίας του, συμπεριλαμβανομένων των τελικών σημείων.

Το θεώρημα 1 (Παράγραφος 2.2) ισχύει για κινούμενους φύλακες ανοιχτής πλευράς για οποιοδήποτε μονότονο πολύγωνο με n κορυφές (αυτό που κάθε οριζόντια γραμμή τέμνει το περίγραμμά του το πολύ σε δύο σημεία).

Θεώρημα 4. (Χωρίς απόδειξη). Για οποιοδήποτε μη μονότονο πολύγωνο P με n κορυφές, $\lceil n+1/4 \rceil$ κινητοί φρουροί κλειστής πλευράς που περιπολούν αυστηρά στις πλευρές είναι πάντα επαρκείς και μερικές φορές απαραίτητοι ώστε να παρακολουθήσουν το P , ενώ $\lfloor n/4 \rfloor$ κινητοί φύλακες κλειστής πλευράς που επιτρέπεται να ταξιδεύουν μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών είναι επίσης επαρκείς για τη φύλαξη του P και μερικές φορές απαραίτητοι.



Εικόνα 16 Κινούμενοι φύλακες σε μη μονότονο επτάγωνο

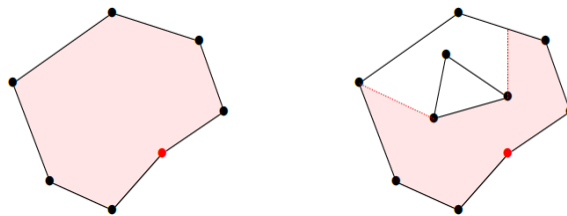
Στο παραπάνω σχήμα το ίδιο πολύγωνο με επτά κορυφές απαιτεί, βάσει του Θεωρήματος 4, δύο κινούμενους φύλακες στις πλευρές του (στην περίμετρο), αλλά μόνο έναν στην διαγώνιο.

(Αριστερό σχήμα): $\lceil n+1/4 \rceil = \lceil 8/4 \rceil = 2$.

(Δεξιό σχήμα): Επιτρέποντας στους φύλακες να ταξιδεύουν μεταξύ μη γειτονικών κορυφών (στην κόκκινη διαγώνιο) σημαίνει ότι χρειάζονται λιγότεροι, όπως συμβαίνει σε αυτό το παράδειγμα $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor 7/4 \rfloor = 1$.

4.2.2 Πολύγωνα με τρύπες

Φυσιολογικά θα περίμενε κάποιος να κανείς να δει έργα τέχνης σε μια γκαλερί τέχνης αλλά δεν μπορεί όλα τα έργα να είναι μόνο πίνακες και να εκτίθεται μόνο σε τοίχους. Στις περιπτώσεις όπου οι γκαλερί τέχνης ή οποιεσδήποτε κατόψεις έχουν γλυπτά, κολώνες, τοίχους στήριξης και άλλα τέτοια χαρακτηριστικά που μπορούν να εμποδίσουν τη θέα κάποιου, τότε εξετάζουμε την έννοια των πολυγώνων με τρύπες.

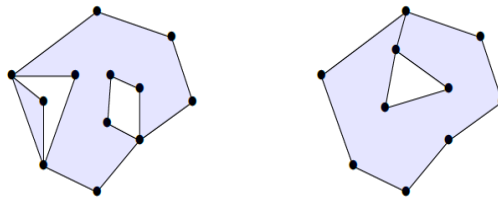


Εικόνα 17 Πολύγωνα με οπές

Ένα πολύγωνο P λέγεται ότι έχει οπές όταν ένα ή περισσότερα πολύγωνα βρίσκονται πλήρως μέσα στο εσωτερικό του P . Η παρουσία οπών σε ένα πολύγωνο μπορεί να περιορίσει την όραση των φυλάκων του πολυγώνου (Εικόνα 17, οι φύλακες σημειώνονται με κόκκινο χρώμα, δεξιό σχήμα η ορατότητα περιορίζεται).

Ορισμός. Ένα πολύγωνο με τρύπες μπορεί να θεωρηθεί ένα πολύγωνο P όπου όλες οι πλευρές και κορυφές ενός ή περισσότερων πολυγώνων H_1, H_2, \dots, H_n βρίσκεται εντελώς μέσα του εσωτερικού του P . Το εσωτερικό H_1, H_2, \dots, H_n δεν θεωρείται μέρος του εσωτερικού του P . Ένα πολύγωνο χωρίς τρύπες μπορεί να αναφέρεται ως απλά-συνδεδεμένο πολύγωνο.

Ωστόσο, ο ορισμός του πολυγώνου μας επιτρέπει να αγνοήσουμε μία τρύπα σε ένα πολύγωνο P εάν υπάρχει μια ακμή που συνδέει μια κορυφή του H_i με μια κορυφή του P (βλ. εικ. 18). Αν το H_i και το P μοιράζονται μια ακμή με αυτόν τον τρόπο, τότε οι κορυφές και οι ακμές του H_i μπορούν να θεωρηθούν ως μέρος της περιμέτρου του P .



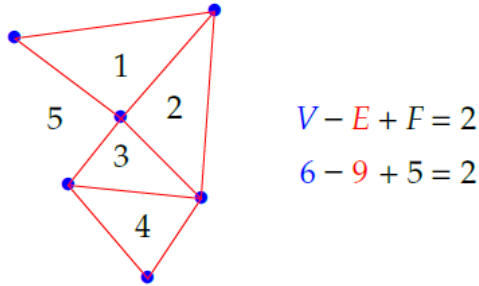
Εικόνα 18 Πολύγωνα με οπές που μοιράζονται ακμές ή κορυφές

Τα πολύγωνα που βρίσκονται μέσα στο πολύγωνο P , αλλά μοιράζονται κορυφές με το P , εξακολουθούν να θεωρούνται τρύπες. Ωστόσο, εάν μια οπή και το πολύγώνό της συνδέονται με μια κορυφή τότε οι κορυφές και οι πλευρές αυτής της οπής μπορούν να θεωρηθούν ως μέρος της περιμέτρου (του ορίου) του P (Εικόνα 18).

Το 1982, ο Joseph O'Rourke χρησιμοποίησε αυτόν τον ορισμό των απλών πολυγώνων και την έννοια των οπών και των πολυγώνων που μοιράζονται τις ακμές, για να δείξει ότι τα απλά πολύγωνα με τρύπες μπορεί επίσης να τριγωνιστούν. Η μέθοδος για να γίνει αυτό είναι πολύ παρόμοια με την απόδειξη ύπαρξης τριγωνισμού που αναφέραμε στην πρόταση 2 του 2^{ου} Κεφαλαίου.

Ο αριθμός των τριγώνων που προκύπτουν από τη διαίρεση ενός πολυγώνου με τρύπες με τέτοιο τρόπο θα διαφέρει από τον αριθμό που έχει ένα απλά-συνδεδεμένο πολύγωνο. Πολλά αντίστοιχα αποτελέσματα από τη θεωρία γραφημάτων είναι στη διάθεσή μας με πιο αξιοσημείωτο το θεώρημα του Euler.

Θεώρημα Euler. Για κάθε επίπεδο τριγωνισμό σε T τρίγωνα, ισχύει η εξίσωση $V - E + F = 2$, όπου V είναι ο αριθμός των κορυφών των τριγώνων T , E είναι ο αριθμός των ακμών και F είναι ο αριθμός των προσόψεων ή των κλειστών περιοχών που είναι χωρισμένες με τα T τρίγωνα.



$$V - E + F = 2$$

$$6 - 9 + 5 = 2$$

Εικόνα 19 Παράδειγμα εξίσωσης τριγωνισμού (Euler)

Με την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των τριγώνων που θα μας δώσει ο τριγωνισμός με n κόμβους και h τρύπες. Ο αριθμός των τριγώνων, t , θα είναι $t = F - 1 - h$, αφού δεν μπορούμε να μετρήσουμε το εσωτερικό των οπών ή το εξωτερικό του πολύγωνα. Φυσικά, $V = n$, και $E = (3t+n)/2$, καθώς μετράμε κάθε ακμή του καθενός τριγώνου και κάθε οριακή ακμή 2 φορές (για αυτό διαιρούμε με δύο).

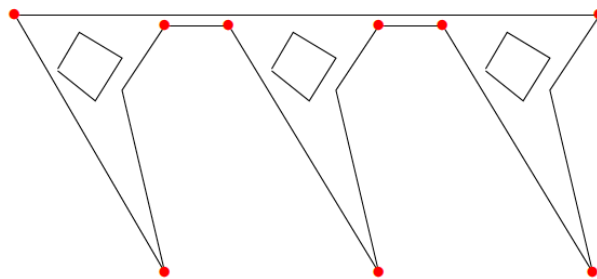
$$V - E + F = 2$$

$$n - (3t + n)/2 + h + t + 1 = 2$$

$$n - t + 2h = 2$$

$$t = n + 2h - 2$$

Ο O'Rourke υποστήριξε ότι επειδή ένα απλά-συνδεδεμένο πολύγωνο έχει $n - 2$ τρίγωνα στον τριγωνισμό του, και απαιτεί $\lceil n/3 \rceil$ φύλακες, τότε για οποιοδήποτε πολύγωνο με h τρύπες και $n + 2h - 2$ τρίγωνα στον τριγωνισμό του, αρκεί να έχει $(n+2h)/3$ φύλακες. Ωστόσο, δεν έχουν βρεθεί ακόμη πολύγωνα που να το υποστηρίζουν αυτό με αποτέλεσμα πολλοί μαθηματικοί να πιστεύουν ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μειωθεί.



Εικόνα 20 Το 24-γωνο με 3 τρύπες

Ένα παράδειγμα πολύγωνα που απαιτεί $(n+h)/3$ φύλακες φαίνεται στην Εικόνα 20. Αυτό το πολύγωνο έχει 24 κορυφές και 3 τρύπες και απαιτούνται 9 φύλακες για την πλήρη παρακολούθησή του

Τα τελευταία χρόνια, οι μαθηματικοί βρήκαν ότι $(n+h)/3$ φρουροί είναι επαρκείς και μερικές φορές απαραίτητοι για τη φύλαξη σε πολύγωνα με τρύπες, όταν αυτοί επιτρέπεται να τοποθετούνται οπουδήποτε στο πολύγωνο σε αντίθεση με αυτούς που βρίσκονται μόνο στις κορυφές (δηλ. να είναι

point guards και όχι απαραίτητα vertex guards). Ο Kaufmann και ο Kriegel, που απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα το 1991, εικάζουν ότι $(n+h)/3$ φύλακες κορυφής χρειάζονται και για τα πολύγωνα με τρύπες.

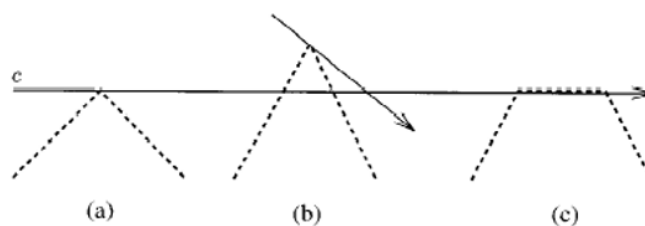
Θεώρημα 5 [33] Είναι επαρκές και μερικές φορές απαραίτητοι $(n+h)/3$ *point guards*, προκειμένου να καλύψουν ένα πολύγωνο με n κορυφές και h τρύπες.

4.3 Επισκόπηση της Σταθερής Υπόθεσης

Όλοι οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της (προκαθορισμένης) συντομότερης διαδρομής φύλακα ξεκινούν με την κατασκευή μιας αρχικής διαδρομής του φύλακα μέσα από την πόρτα d , δηλαδή μια κλειστή καμπύλη που τέμνεται με όλες τις προς τα πίσω βασικές κοπές σε σχέση με το d . Αυτό προκύπτει από το Λήμμα 2.1 αφού το d είναι, εξ ορισμού, στα αριστερά των μπροστινών ουσιαστικών κοπών ως προς αυτό, και ως εκ τούτου, αυτές οι κοπές δεν χρειάζεται να ληφθούν υπόψη.

Στη συνέχεια, οι αλγόριθμοι προχωρούν εφαρμόζοντας μια ακολουθία προσαρμογών στην αρχική διαδρομή. Για να εξηγηθούν αυτές οι προσαρμογές, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τι είδους διασταυρώσεις μπορεί να έχει μια διαδρομή φύλακα με τις προς τα πίσω ουσιαστικές κοπές σε σχέση με το d .

- Μια διαδρομή φύλακα κάνει μια ακούσια επαφή με μία κοπή c εάν η διασταύρωση της διαδρομής και του c είναι ένα σημείο (και όλα τα άλλα σημεία της διαδρομής βρίσκονται στα δεξιά του c) (βλέπε Εικ. 15(α)). Μια ακούσια επαφή είναι τέλεια εάν η εισερχόμενη γωνία ισούται με την γωνία εξόδου της.
- Μια διαδρομή φύλακα κάνει διασταυρούμενη επαφή με το c , αν κάθε διασταύρωση είναι πάλι ένα σημείο αλλά η επαφή δεν είναι ακούσια (βλέπε Εικ. 15(β)).
- Τέλος, η διαδρομή κάνει μία εφαπτομενική επαφή με το c αν η τομή είναι ευθύγραμμο τμήμα και όλα τα άλλα σημεία της διαδρομής βρίσκονται στα δεξιά του c (βλέπε Εικ. 15(γ)).



Εικόνα 21 Οι τρεις περιπτώσεις επαφής

Θεωρούμε ως ουσιαστικές (βασικές) κοπές αυτές που σχηματίζονται όταν η διαδρομή του φύλακα κάνει ακούσιες επαφές. Ονομάζουμε αυτές τις κοπές ως ενεργές κοπές και τα θραύσματα που περιέχουν τα σημεία τομής ως ενεργά θραύσματα.

Για την ορθότητα των αλγορίθμων καθώς και για την ευκολία των υπολογισμών πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες για το σύνολο των ενεργών θραυσμάτων:

1^η Πληρότητα: Το σύνολο των ενεργών θραυσμάτων κυριαρχεί σε όλες τις βασικές κοπές του P .

2^η Ανεξαρτησία: Μία βασική κοπή κυριαρχείται από ακριβώς ένα ενεργό θραύσμα.

Λήμμα 3.1. *Η συνθήκη πληρότητας πρέπει να ισχύει για τα ενεργά τμήματα της συντομότερης διαδρομής φύλακα.*

Απόδειξη. Εάν υπήρχε κάποια βασική κοπή που δεν κυριαρχείται από ένα ενεργό θραύσμα, τότε η πλευρά του P που αντιστοιχεί στην βασική κοπή δεν θα φαινόταν από τη διαδρομή του φύλακα. \square

Επιπλέον, τα ακόλουθα δύο λήμματα παρέχουν έναν τρόπο κατασκευής της συντομότερης σταθερής (προκαθορισμένης) διαδρομής φύλακα δεδομένης μιας αρχικής διαδρομής φύλακα.

Λήμμα 3.2 [15]. *Υπάρχει μια συντομότερη διαδρομή φύλακα που διατρέχει τις ενεργές κοπές όπως αυτές εμφανίζονται καθώς διανύεται η περίμετρος του πολυγώνου.*

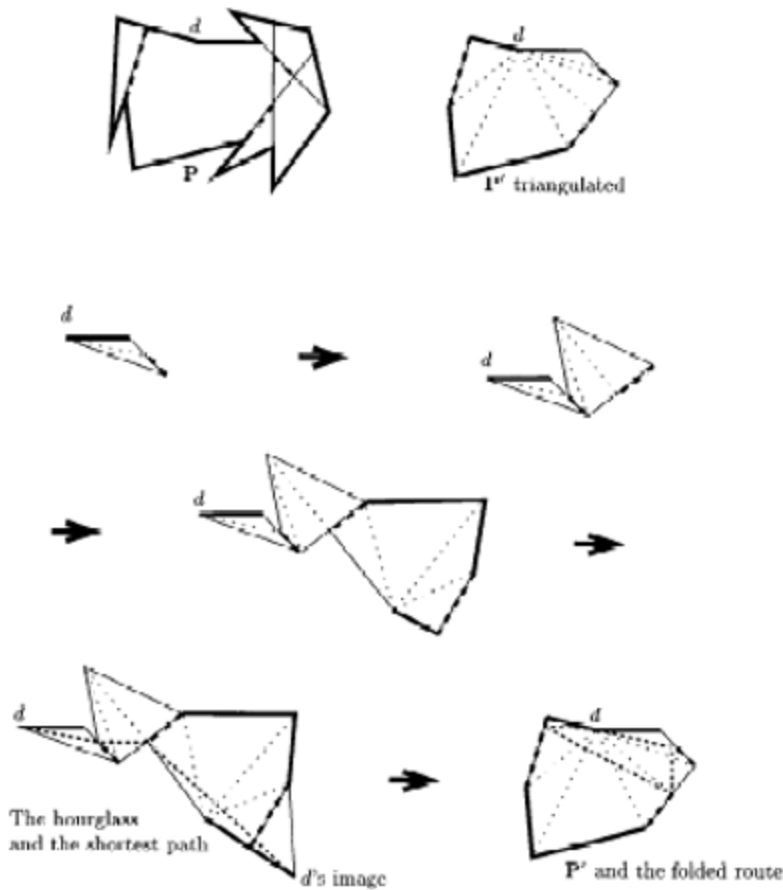
Λήμμα 3.3 [15]. Μια συντομότερη διαδρομή φύλακα είτε κάνει τέλειες ακούσιες επαφές στις ενεργές κοπές ή διατρέχει τα τελικά σημεία του θραύσματος των ενεργών κοπών.

Και τα δύο λήμματα ισχύουν επίσης για τη συντομότερη τυχαία διαδρομή φύλακα. Έτσι, η συντομότερη διαδρομή που θα επισκέπτεται όλες τις ουσιαστικές κοπές και θα υπακούει στις ιδιότητες των δύο λημμάτων θα είναι η συντομότερη διαδρομή από όλες.

Το πρόβλημα επομένως γίνεται αυτό της προσαρμογής της αρχικής διαδρομής έτσι ώστε όλες οι ακούσιες επαφές να είναι τέλειες (ή να μην μπορούν να γίνουν τέλειες άλλες ακούσιες επαφές).

Δεδομένου ενός συνόλου ενεργών κοπών, πώς μπορεί να υπολογιστεί η συντομότερη σταθερή διαδρομή φύλακα με ακούσιες επαφές σε αυτές τις κοπές;

Η προσέγγιση που ακολουθείται εφαρμόζει μια διαδικασία που λέγεται ξεδίπλωμα του πολυγώνου P και παράγει ένα πολυγωνικό σχήμα που ονομάζεται κλεψύδρα, έτσι ώστε το συντομότερο μονοπάτι από το d στην εικόνα του στην κλεψύδρα να αντιστοιχεί στη συντομότερη σταθερή διαδρομή φύλακα μέσω d . Η διαδικασία εξηγείται προσεκτικά από τους Chin και Ntafos [15]. Η κλεψύδρα κατασκευάζεται κόβοντας τα μέρη του πολυγώνου P που βρίσκονται στα αριστερά των ενεργών κοπών. Για να γίνει αυτό, υποθέτουμε ότι οι ενεργές κοπές δίνονται με τη σειρά καθώς τα σημεία εκκίνησης διασχίζονται με αριστερόστροφη σειρά κατά μήκος της περιμέτρου του P . Τώρα παίρνουμε κάθε ενεργή κοπή και αφαιρούμε το μέρος του P στα αριστερά της τομής. Αυτό περιλαμβάνει τον υπολογισμό του σημείου τομής με την προηγούμενη ενεργή κοπή και εάν υπάρχει, εισάγουμε μια νέα κορυφή σε αυτό το σημείο της διασταύρωσης. Η διαδικασία απαιτεί σταθερό χρόνο για κάθε ενεργή κοπή και ως εκ τούτου, γραμμικό χρόνο συνολικά. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα νέο πολύγωνο P' με τις ενεργές κοπές στην περίμετρο του. Το πολύγωνο αυτό «τριγωνίζεται» χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Chazelle [16] και ξεδιπλώνεται χρησιμοποιώντας τις ενεργές κοπές ως καθρέφτες (βλ. Εικόνα 16) με τον ακόλουθο τρόπο:



Εικόνα 22 Αναπαράσταση της διαδικασίας «ξεδιπλώματος»

Από το σημείο d ακολουθούμε την περίμετρο του πολυγώνου δεξιόστροφα μέχρι να επιτευχθεί η πρώτη ενεργή κοπή. Κατασκευάζουμε ένα πολύγωνο από τα τρίγωνα του τριγωνισμού που γειτνιάζουν με το διασχιζόμενο τμήμα της περιμέτρου. Τώρα ακολουθούμε την περίμετρο του πολυγώνου από την πρώτη ενεργή κοπή στη δεύτερη ενεργή, κόβουμε και κατασκευάζουμε ένα πολύγωνο που αποτελείται από τα τρίγωνα που βρίσκονται δίπλα σε αυτό το τμήμα της περιμέτρου. Συνδέουμε αυτό το πολύγωνο με το προηγούμενως κατασκευασμένο πολύγωνο χρησιμοποιώντας την ενεργή κοπή ως καθρέφτη. Συνεχίζουμε τη διαδικασία όπως στην Εικόνα 16 μέχρι να φτάσουμε στο σημείο εκκίνησης d . Το κατασκευασμένο πολύγωνο είναι η κλεψύδρα του P . Το συντομότερο μονοπάτι στην κλεψύδρα από d έως το σημείο εικόνας του είναι υπολογισμένο [21], [22]. Τέλος, η διαδρομή αναδιπλώνεται για να δώσει τη συντομότερη σταθερή διαδρομή φύλακα στο P . Η χρονική πολυπλοκότητα είναι γραμμική, αφού το P' μπορεί να τριγωνιστεί με γραμμικό χρόνο και η συντομότερη διαδρομή μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο σε ένα τρίγωνο [21], [22].

Συγχρόνως, αποδείχθηκε πώς να υπολογιστεί τη συντομότερη σταθερή διαδρομή φύλακα σε χρόνο $O(n|CF|)$ και $O(n|C|)$ αποθήκευση, όπου $|C|$ είναι ο αριθμός των βασικών κοπών και F

είναι ο αριθμός των θραυσμάτων, χρησιμοποιώντας έναν αυξητικό αλγόριθμο σε συνδυασμό με δυναμικό προγραμματισμό.

Θεώρημα $6(n+h)/3$ point guards [20] Υπάρχει ένας αλγόριθμος που, δεδομένου ενός σημείου d της περιμέτρου σε ένα απλό πολύγωνο n πλευρών, των προς τα πίσω ουσιαδών κοψιμάτων ως προς το d , και των υποδιαίρέσεων τους σε θραύσματα, υπολογίζει τη συντομότερη διαδρομή φύλακα μέσω του σημείου d σε χρόνο $O(n|CF|)$ και χρόνο αποθήκευση $O(n/|C|)$, όπου $|C|$ είναι ο αριθμός των ουσιαδών κοπών και F είναι ο αριθμός των τμημάτων (θραυσμάτων).

Στην Παράγραφο 4.5 δείχνουμε ότι ο χρόνος για τον υπολογισμό του συνόλου των βασικών κοπών είναι $O(n \log n)$, και ότι τα θραύσματα μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $O(n \log n + F)$. Αυτό, μαζί με το θεώρημα 1 υπονοεί ότι η συντομότερη σταθερή διαδρομή φύλακα μέσα από ένα δεδομένο σημείο της περιμέτρου μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n^4)$, αφού $F = O(n^2)$.

4.4 Παρουσίαση του Αλγορίθμου

Η ιδέα του αλγορίθμου είναι να προϋπολογίσει τη συντομότερη σταθερή διαδρομή του φύλακα μέσω των ακούσιων επαφών του στα τελικά σημεία των θραυσμάτων. Έτσι, μένει μόνο μια περιορισμένη περίπτωση για τον υπολογισμό, αυτή που η συντομότερη διαδρομή φύλακα κάνει μόνο τέλεια ακούσια επαφή στο εσωτερικό των θραυσμάτων. Για να λυθεί το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση, εφαρμόζεται μια διαδικασία που ονομάζεται ολίσθηση “sliding” που κάνει μια διακριτή προσομοίωση του συνεχούς κίνηση που εκτελείται από ένα ακούσιο σημείο ενός θραύσματος.

Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου που υπολογίζει μια συντομότερη τυχαία διαδρομή φύλακα παρουσιάζεται παρακάτω. Στο Βήμα 1 του ψευδοκώδικα, υπολογίζουμε το σύνολο C των ουσιαστικών κοπών και αυτό το μέρος του αλγορίθμου περιγράφεται στην τελευταία παράγραφο 4.5.

Algorithm *Shortest-Floating-Watchman-Route*

Input: A simple polygon P of n edges
Output: A shortest floating watchman route W

1 Compute the set C of essential cuts and the subdivision into fragments
2 **for** each fragment end point d **do**
2.1 Compute the shortest watchman route W_d forced to reflect on d
endfor
3 **for** each fragment f and each end point d of f **do**
3.1 Apply a sliding process on f from d to the other end point and compute the shortest watchman routes forced to reflect on an interior point of f
endfor
4 Return the shortest of the computed watchman routes
End *Shortest-Floating-Watchman-Route*

4.5 Υπολογισμός των ουσιαστικών κοπών

Για να υπολογίσουμε το σύνολο C των βασικών κοπών, ξεκινάμε με τον υπολογισμό όλων των κοπών προέκτασης του πολυγώνου. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιούμε μια δομή δεδομένων λήψης ακτινών όπως παρουσιάστηκε από τους Guibas et al. [21] ή Hershberger και Suri [23]. Οι λειτουργίες λήψης ακτινών μπορούν να εκτελεστούν σε χρόνο $O(\log n)$ καθεμία, με το αρχικό βήμα προεπεξεργασίας να παίρνει γραμμικό χρόνο. Σε κάθε ακούσια κορυφή του πολυγώνου, εκτελούμε δύο πράξεις λήψης ακτινών, κάθε μία προς την κατεύθυνση μίας από τις δύο παρακείμενες πλευρές προς το εσωτερικό του πολυγώνου. Με αυτόν τον τρόπο καθορίζουμε τις δύο κοπές προέκτασης που σχετίζονται με κάθε ακούσια κορυφή. Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται είναι $O(n \log n)$.

Στη συνέχεια καθορίζουμε μία ουσιαστική κοπή. Έστω E το σύνολο των κοπών προέκτασης. Μεταξύ δύο κοπών είναι εύκολο να ελέγχεται σε σταθερό χρόνο εάν η μία κοπή κυριαρχεί στην άλλη, αν διατηρούμε πληροφορίες για το πού βρίσκονται τα κομμένα τελικά σημεία στην περίμετρο του P . Αφού η ιδιότητα κυριαρχίας είναι μεταβατική, μπορούμε, σε γραμμικό χρόνο, να βρούμε μία ουσιαστική κοπή πραγματοποιώντας συγκρίσεις ανά ζεύγη, διατηρώντας πάντα την κοπή που δεν κυριαρχεί. Έστω c_1 είναι η ουσιαστική κοπή που βρίσκουμε από αυτή τη διαδικασία.

Τώρα ταξινομούμε το σύνολο E έτσι ώστε οι κοπές προέκτασης να εμφανίζονται με την ίδια σειρά που εμφανίζονται τα αρχικά τους σημεία σε μια αριστερόστροφη διέλευση της περιμέτρου, ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης της c_1 . Για να υπολογίσουμε τις βασικές κοπές, διατρέχουμε το σύνολο E και εκτελούμε τα εξής βήματα:

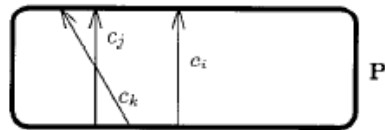
```
Let  $current := c_1$  and set  $C := \{c_1\}$ 
for  $i := 2$  to  $|E|$  do
    if  $current$  does not dominate  $c_i$  then
         $C := C \cup \{c_i\}$ 
         $Current := c_i$ 
    endif
endfor
```

Λήμμα 4.1. Μετά τον τερματισμό του παραπάνω βρόχου το σύνολο C περιέχει τις ουσιαστικές κοπές.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι όταν τελειώσει ο βρόχος όλες οι ουσιαστικές κοπές είναι στο C , σημειώνουμε ότι αρχικά μία κοπή προέκτασης c εισάγεται στο C , εκτός εάν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποια άλλη ουσιαστική κοπή που κυριαρχεί στη c . Ως εκ τούτου, μένει να αποδειχθεί ότι το σύνολο C περιέχει μόνο τις ουσιαστικές κοπές.

Πρώτα θεωρούμε ότι εάν μια κοπή $c_j \in E$ κυριαρχεί σε μια περικοπή $c_i \in E$, τότε σύμφωνα με τη σειρά κατάταξης του E που προσδιορίστηκε προηγουμένως, θα είναι $j < i$. Εάν αυτό δεν συμβαίνει, υπάρχουν σημεία στα αριστερά του c_j που δεν βρίσκονται στα αριστερά του c_i , π.χ. τα σημεία της περιμέτρου μεταξύ των σημείων έναρξης του c_i και c_j .

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μη ουσιαστική κοπή c_i στο C , όπου i είναι ο δείκτης της ταξινομημένης κατάταξης στο E . Η κοπή c_i κυριαρχεί κάποιας ουσιαστικής κοπής $c_j \in C \subseteq E$, με $j < i$. Θεωρούμε την υποακολουθία c_j, \dots, c_i των κοπών στο E . Όταν εφαρμόζεται το τεστ κυριαρχίας στην c_i , τότε η μεταβλητή $current = c_k$, με $j \leq k \leq i - 1$. Ισχυριζόμαστε ότι, σε αυτή την περίπτωση, η κοπή c_i κυριαρχεί επίσης της c_k . Για να ισχύει αυτό, παρατηρούμε ότι, εφόσον το c_i κυριαρχείται από το c_j , η κοπή c_k πρέπει να τέμνει τη c_j , διαφορετικά η c_k κυριαρχείται από το c_j . Ωστόσο, αυτό σημαίνει ότι η c_k κυριαρχεί στη c_i , και αυτό σημαίνει ότι όταν ο βρόχος θεωρεί τη c_i ως κυρίαρχη κοπή, αυτή δεν θα να περιλαμβάνεται στο C (βλέπε Εικόνα 17)



Εικόνα 23 Οι κυρίαρχες κοπές έχουν εξαλειφθεί από το C

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνολική κατανάλωση χρόνου για τον υπολογισμό των ουσιαστικών κοπών είναι $O(n \log n)$. Επιπλέον, ο συντομότερος αλγόριθμος διαδρομής φύλακα απαιτεί επίσης την υποδιαίρεση των βασικών κοπών σε θραύσματα, δηλ. τα τμήματα της γραμμής μεταξύ των διαδοχικών σημείων τομής των ζευγών των ουσιαστικών κοπών. Αυτά μπορούν να υπολογιστούν και να ταξινομηθούν μαζί με κάθε ουσιαστική κοπή, σε χρόνο $O(n \log n + F)$, όπου F υποδηλώνει τον αριθμό των θραυσμάτων, χρησιμοποιώντας έναν περίπλοκο αλγόριθμο σάρωσης επιπέδου που αναπτύχθηκε από τους Chazelle και Edelsbrunner [24].

5 Συμπεράσματα

Για το πρόβλημα του υπολογισμού της συντομότερης τυχαίας διαδρομής του φύλακα σε ένα απλό πολύγωνο υπολογίστηκε, με τη βοήθεια του αλγορίθμου, μια πολυωνυμική λύση χρόνου.

Ο αλγόριθμος είναι προσαρμοστικός με την έννοια ότι η πολυπλοκότητα δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του πολυγώνου αλλά και του αριθμού των ουσιαστικών κοπών και του αριθμού των θραυσμάτων ο οποίος μπορεί να είναι τετραγωνικός (σαν μέτρο) αλλά πολλές φορές είναι αρκετά μικρότερος, με αποτέλεσμα να μειώνεται αισθητά η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

Σχετικά ερωτήματα του προβλήματος του μουσείου ή της πινακοθήκης, όπως είναι επίσης γνωστό το *art gallery problem* είναι, για παράδειγμα, αυτά του υπολογισμού πολλών διαδρομών φύλακα σε ένα πολύγωνο χρησιμοποιώντας διαφορετικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Άλλα σχετικά ερωτήματα σε αυτόν τον τομέα είναι:

- Αν το πρόβλημα του υπολογισμού δύο διαδρομών φύλακα σε ένα πολύγωνο, έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των δύο διαδρομών να είναι το μικρότερο, έχει πολυωνυμική χρονική λύση ή όχι.
- Πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε φύλακες (ή σταθμούς) σε ένα πολύγωνο έτσι ώστε να καλύπτουμε ένα μέγιστο μήκος της περιμέτρου του.
- Πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε φύλακες (ή σταθμούς) σε ένα πολύγωνο του οποίου η περίμετρος έχει αξία έτσι ώστε να καλύπτουμε τη μέγιστη αξία.
- Πώς μπορούμε να καλύψουμε ένα μέγιστο εμβαδόν του εσωτερικού του πολυγώνου.

Τέλος, αφού εξερευνήσαμε μερικές επεκτάσεις του προβλήματος, όπως φαίνεται, υπάρχουν πολλά περισσότερα ανεξερεύνητα θέματα στο *art gallery problem* που θα κεντρίσουν το ενδιαφέρον των ερευνητών, έτσι ώστε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από αυτό το πρόβλημα να προκαλέσουν πιθανότατα τον ενθουσιασμό των χρηστών φωτίζοντας νέες διαδρομές και λύσεις στο μέλλον.

6 Πηγές – Βιβλιογραφία

1. “Turing award 2013”. ACM.
2. R.R. Brooks, S.S. Iyengar, Multi-sensor fusion: fundamentals and applications with software. (Prentice Hall PTR, 1998)
3. C.Y. Chong, et al., Distributed hypothesis testing in distributed sensor networks, Artificial Intelligence & DS, Tech. Rep TP-1048-02, July 1984
4. S.S. Iyengar, R.L. Kashyap, R.N. Madan, Distributed sensor networks-introduction to the special section, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 21(5), (1991)
5. J. O’Rourke, Art gallery theorems and algorithms. (Oxford University Press, 1987)
6. S. Kumar, T.H. Lai, and A. Arora, Barrier coverage with wireless sensor networks, in Proceedings of the 11th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking. (Cologne, Germany, 2005), pp. 284–298
7. D.W. Gage, Command control for many-robot systems in Proceedings of Nineteenth Annual AUUS Technical Symposium, 1992, pp. 22–24
8. [S] Safak, G. (2009). The Art-Gallery Problem: A Survey and an Extension (Master's thesis, Royal Institute of Technology, 2009). Sweden: KTH Computer Science and Communication
9. Erickson, L.H., LaValle, S.M. (2010). A chromatic art gallery problem.
10. [AZ] Aigner, M., Ziegler, G. M. (2004). Proofs from the book (4th ed.). Berlin: Springer.
11. Erickson, L.H., LaValle, S.M. (2010). A chromatic art gallery problem.
12. Carlsson, S., Jonsson, H., Nilsson, B. J. (1993). Finding the shortest watchman route in a simple polygon. Algorithms and Computation Lecture Notes in Computer Science, 22(3), 58-67. doi: 10.1007/3-540-57568-5 235
13. A. Aggarwal. The Art Gallery Theorem: Its Variations, Applications and Algorithmic Aspects. Ph.D. thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, 1984.
14. D. T. Lee, A. K. Lin. Computational Complexity of Art Gallery Problems. IEEE Transactions on Information Theory, IT-32:276–282, 1986.
15. W. Chin, S. Ntafos. Shortest Watchman Routes in Simple Polygons. Discrete and Computational Geometry, 6(1):9–31, 1991.
16. B. Chazelle. Triangulating a Simple Polygon in Linear Time. In Proc. 31st Symposium on Foundations of Computer Science, pages 220–230, 1990.
17. X.-H. Tan, T. Hirata. Constructing Shortest Watchman Routes by Divide and Conquer. In Proc. 4th International Symposium on Algorithms and Computation, pages 68–77. Lecture Notes in Computer Science 762, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
18. X.-H. Tan, T. Hirata, Y. Inagaki. An Incremental Algorithm for Constructing Shortest Watchman Routes. International Journal of Computational Geometry and Applications, 3:351–365, 1993.
19. 8. M. Hammar, B.J. Nilsson. Concerning the Time Bounds of Existing Shortest Watchman Route Algorithms. In Proc. 11th International Symposium on Fundamentals in Computation Theory, FCT ’97, pages 210–221. Lecture Notes in Computer Science 1279, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
20. X.-H. Tan, T. Hirata, Y. Inagaki. Corrigendum to “An Incremental Algorithm for Constructing Shortest

Watchman Routes". *International Journal of Computational Geometry and Applications*, to appear.

21. L. Guibas, J. Hershberger, D. Leven, M. Sharir, R. Tarjan. Linear Time Algorithms for Visibility and Shortest Path Problems Inside Triangulated Simple Polygons. *Algorithmica*, 2:209–233, 1987.

22. D. T. Lee, F. P. Preparata. Euclidean Shortest Paths in the Presence of Rectilinear Barriers. *Networks*, 14:393–410, 1984.

23. J. Hershberger, S. Suri. A Pedestrian Approach to Ray Shooting: Shoot a Ray, Take a Walk. In *Proc. SODA*, pages 54–63, 1993.

24. B. Chazelle, H. Edelsbrunner. An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. *Journal of the ACM*, 39(1):1–54, 1992.

25. J.-H. Kim, G. Sharma, S. Iyengar, FAMPER: a fully autonomous mobile robot for pipeline exploration, in *Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, (2010), pp. 517–523

26. S. Fisk, A short proof of Chvatal's watchman theorem. *J. Comb. Theory Ser. B* 24(3), 374 (1978)

27. V. Chvatal, A combinatorial theorem in plane geometry. *J. Comb. Theory* 18, 39–41 (1975)

28. J. O'Rourke, K. Supowit, Some NP-hard polygon decomposition problems. *IEEE Trans. Inf. Theory* 29, 181–190 (1983)

29. D.T. Lee, A.K. Lin, Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Trans. Inf. Theory* 32(2), 276–282 (1986)

30. D. Schuchardt, H.-D. Hecker, Two np-hard art-gallery problems for ortho-polygons. *Math. Logic. Quart.* 41, 261–267 (1995)

31. M.J. Katz, G.S. Roisman, On guarding the vertices of rectilinear domains. *Comput. Geom.: Theory Appl.* 39(3), 219–228 (2008)

32. Antonio L. Bajuelos, Santiago Canales, Gregorio Hernández, Mafalda Martins, and Ines Matos. Some Results on Open-Edge and Open Mobile Guarding of Polygons and Triangulations. *The Computer Journal*, 58(1):160–171, 2015.

33. Frank Hoffmann, Michael Kaufmann, and Klaus Kriegel. The Art Gallery Theorem for Polygons with Holes. In [1991] *Proceedings 32nd Annual Symposium of Foundations of Computer Science*, pages 39–48, Oct 1991.