

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Μέθοδοι κατασκευής κυρτών περιβλημάτων και εφαρμογές

Κωστόπουλος Παρασκευάς
ΑΜ: 201114

Επιβλέπων Καθηγητής: Βλάχος Δημήτριος

Τρίπολη, 15 Μαΐου 2013

Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει μια σειρά από αλγόριθμους, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την κατασκευή κυρτών περιβλημάτων στις δύο και τρεις διαστάσεις και αναλύει διάφορες εφαρμογές τους. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας θα παρουσιαστούν οι αλγόριθμοι Graham, Jarvis, Chan και οι χρόνοι πολυπλοκότητας που έχουν για την δημιουργία κυρτών περιβλημάτων στις δύο διαστάσεις. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εξετάσουμε την κατασκευή κυρτών περιβλημάτων στις τρεις διαστάσεις και στο τρίτο θα εξετάσουμε τα διαγράμματα Voronoi - Delaunay και τις εφαρμογές αυτών.

Περιεχόμενα

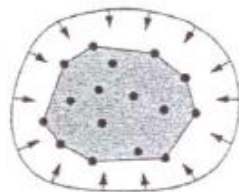
1	Κυρτό περίβλημα σημείων στο επίπεδο	2
1.0.1	Ορισμοί Κυρτών Περιβλημάτων ^[10]	2
1.0.2	Γεωμετρικές εφαρμογές ^[10]	6
1.1	Αλγόριθμοι κατασκευής κυρτού περιβλήματος σε δύο διαστάσεις	7
1.1.1	Ο αλγόριθμος του Graham ^[1]	7
1.1.2	Ο αλγόριθμος του Jarvis ^[2]	8
1.1.3	Ο αλγόριθμος του Chan ^[3]	9
2	Το πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος στις τρεις διαστάσεις	13
2.1	Πολύεδρα ^[10]	13
2.1.1	Ο τύπος του Euler	14
2.1.2	Απόδειξη τύπου του Euler	14
2.2	Κατασκευή κυρτών περιβλημάτων στις τρεις διαστάσεις	15
2.2.1	Ανάλυση Randomized Incremental Algorithms για κυρτά περιβλήματα τριών διαστάσεων και Διαίρεση τριγώνων δυο διαστάσεων ^[6]	15
2.3	Αλγόριθμοι Κατασκευής Κυρτού Περιβλήματος σε τρεις διαστάσεις	20
2.3.1	Ο αυξητικός αλγόριθμος ^[10]	20
2.3.2	Ο Αλγόριθμος Περιτυλίγματος	21
2.3.3	Ο αλγόριθμος του Chan στις τρεις διαστάσεις ^[5]	22
3	Διαγράμματα Voronoi - Delaunay- Εφαρμογές	25
3.1	Γενικά	25
3.2	Διάγραμμα Voronoi ^[9]	25
3.3	Delaunay Διαίρεση σε τρίγωνα	26
3.3.1	Αλγόριθμος υπολογισμού του τριγωνισμού Delaunay ^[9]	27
3.4	Ιδιότητες Voronoi και Delaunay	28
3.5	Αλγόριθμοι υπολογισμού διαγραμμάτων Voronoi ^[10]	30
3.5.1	Τομή Ημιεπιπέδων	30
3.5.2	Αυξητικός Αλγόριθμος	31
3.5.3	Αλγόριθμος Διαίρει και Βασίλευε	31
3.5.4	Ο Αλγόριθμος του Fortune ^[9]	32
3.6	Εφαρμογές διαγραμμάτων Voronoi ^[7]	37
3.6.1	Μέγιστος κενός κύκλος	37
3.6.2	Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο	37
3.7	Διαγράμματα Voronoi k - τάξης	38
3.8	Μέσος Άξονας Πολυγώνου	40
3.9	Σχέση με το κυρτό περίβλημα	40
3.9.1	Σχέση με Τομές (Υπερ- Επιπέδων)	42

Κεφάλαιο 1

Κυρτό περίβλημα σημείων στο επίπεδο

Μία από τις πιο χρήσιμες και ενδιαφέρουσες δομές στην υπολογιστική γεωμετρία είναι το κυρτό περίβλημα. Έχει ιδιαίτερη σημασία για την υπολογιστική γεωμετρία, γιαυτό μια από τις πρώτες δημοσιεύσεις σε αυτόν τον τομέα αφορούσε τον υπολογισμό του. Από τότε η έρευνα έχει αποδώσει μια μεγάλη ποικιλία αποτελεσμάτων επιτυγχάνοντας βέλτιστους αλγόριθμους.

Η κατασκευή του κυρτού περιβλήματος αφορά πρακτικές εφαρμογές, αλλά αποτελεί και τη λύση σε μια σειρά προβλημάτων που εμφανίζονται στην υπολογιστική γεωμετρία. Ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων S στο επίπεδο μελετήθηκε διεξοδικά, όπως και οι εφαρμογές του, για παράδειγμα η αναγνώριση προτύπων [Akl - Toussaint (1978)], η επεξεργασία εικόνας [Rosenfeld (1969)] και η τομή και κατανομή αποθεμάτων [Freeman (1974), Sklansky (1972), Freeman - Shapira (1975)].



Σχήμα 1.1: Κυρτό Περίβλημα

Η έννοια του κυρτού περιβλήματος ενός συνόλου σημείων S μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή. Εξ ορισμού είναι το μικρότερο κυρτό περίβλημα που περικλείει το σύνολο σημείων S , το οποίο μπορεί να περιγραφεί και ως εξής: εάν θεωρήσουμε, ότι τα σημεία είναι καρφιά κρφωμένα σε ένα επίπεδο κομμάτι ξύλο, τότε το κυρτό περίβλημα τους είναι το πολύγωνο που σχηματίζεται, όταν τεντώσουμε ένα λάστιχο γύρω από τα καρφιά (σχήμα 1.1). Αντίστοιχα το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων στις τρεις διαστάσεις είναι το πολυέδρο που σχηματίζεται, όταν περιτυλίγομαι τα σημεία με μια καλά τεντωμένη ελαστική μεμβράνη.

1.0.1 Ορισμοί Κυρτών Περιβλημάτων ^[10]

Ας δούμε κάποιους ορισμούς του κυρτού περιβλήματος. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο S είναι κυρτό, εάν για κάθε ζεύγος σημείων x, y του S το ευθύγραμμο τμήμα xy που συνδέει τα x

και y ανήκει πλήρως στο S . Οι παρακάτω ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι το μικρότερο κυρτό πολύγωνο P που περικλείει το S (το P είναι το μικρότερο πολύγωνο με την έννοια ότι δεν υπάρχει άλλο κυρτό πολύγωνο P' τέτοιο ώστε $S \subseteq P' \subset P$)
2. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι το κυρτό πολύγωνο με το μικρότερο εμβαδόν μεταξύ των κυρτών πολυγώνων που περικλείουν το S .
3. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι το κυρτό πολύγωνο με τη μικρότερη περίμετρο μεταξύ των κυρτών πολυγώνων που περικλείουν το S .
4. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι η ένωση όλων των κυρτών πολυγώνων με κορυφές από το σύνολο S .
5. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι η ένωση όλων των τριγώνων που ορίζονται από τριάδες σημείων από το σύνολο S .
6. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι η τομή όλων των ημιεπιπέδων που περιέχουν όλα τα σημεία του S (ο ορισμός αυτός έχει εφαρμογή και στο κυρτό περίβλημα των τριών διαστάσεων).

Για να κατανοήσουμε πλήρως τη διαδικασία κατασκευής κυρτού περιβλήματος θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε α) ποια από τα σημεία ενός συνόλου S είναι ακραία, β) ποια είναι η διαδικασία εύρεσης των ακραίων ακμών και γ) πώς επιτυγχάνουμε ταξινόμηση των σημείων μέσω του υπολογισμού του κυρτού περιβλήματος.

Υπολογισμός Ακραίων Σημείων^[8]

Ένα σημείο δεν είναι ακραίο εάν και μόνο εάν ανήκει σε κάποιο τρίγωνο με κορυφές σημεία του δοθέντος συνόλου και δεν είναι κάποια από τις τρεις κορυφές του τριγώνου

Η απόδειξη αυτού του λήμματος βασίζεται στον ορισμό 5 της σελίδας 3 που δώσαμε παραπάνω. Είναι προφανές, ότι ένα σημείο δεν είναι ακραίο, εάν ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου, ενώ μπορεί να είναι ακραίο, εάν είναι η κορυφή του τριγώνου. Σημεία που ανήκουν στην περίμετρο του τριγώνου δεν είναι κορυφές ούτε και ακραία σημεία.

Προφανώς ο υπολογισμός των σημείων που δεν είναι ακραία αρκεί για τον υπολογισμό των ακραίων σημείων.

Υπολογισμός Ακραίων Ακμών

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις ακραίες ακμές, δηλαδή τις ακμές του κυρτού περιβλήματος. Μια ακμή είναι ακραία, εάν κάθε σημείο του συνόλου S είτε βρίσκεται από την μια μόνο πλευρά της ευθείας γραμμής που ορίζει η ακμή, είτε ανήκει σε αυτήν.

Η διαφορά έγκειται στο ότι η παράσταση του συνόρου του κυρτού περιβλήματος εμπεριέχει περισσότερη πληροφορία επιπλέον από τον καθορισμό των κορυφών του περιβλήματος. Στις δύο διαστάσεις η παράσταση του συνόρου απαιτεί τον προσδιορισμό των κορυφών, αλλά και της σειράς τους κατά μήκος του συνόρου, ενώ τα ακραία σημεία είναι απλά οι κορυφές ανεξάρτητα από την σειρά τους.

Τα ακραία σημεία ενός συνόλου σημείων στο επίπεδο είναι οι κορυφές του κυρτού περιβλήματος στις οποίες η εσωτερική γωνία είναι μικρότερη από 180° .

Σε ένα σύνολο σημείων S στο επίπεδο για να βρούμε ποια είναι τα ακραία σημεία παρατηρούμε ότι το σημείο του S με την μεγαλύτερη y -συντεταγμένη είναι ακραίο, εάν είναι το μοναδικό

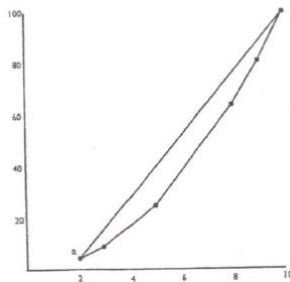
ή υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια σημεία, οπότε είναι και τα δυο ακραία. Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία με την μικρότερη y -συντεταγμένη, καθώς και για την μεγαλύτερη και τη μικρότερη x -συντεταγμένη.

Ένας αλγόριθμος ο οποίος έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n^4)$ δεν μας επιτρέπει να επεξεργαστούμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό δεδομένων. Οι βελτιώσεις που χρειαζόμαστε στον αλγόριθμο θα πρέπει να προέρχονται είτε από την εξάλειψη των υπεράριθμων υπολογισμών είτε από τη διαφορετική θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος. Σε αυτή την ενότητα θα εξερευνήσουμε την πιθανότητα ο αλγόριθμός μας να πραγματοποιεί περιττή δουλειά με στόχο την βελτίωση του χρόνου υπολογισμού του κυρτού περιβλήματος.

Ταξινόμηση Σημείων μέσω υπολογισμού του Κυρτού Περιβλήματος [7]

Ο χρόνος $\Omega(n \log n)$ προκύπτει από την ιδέα της ταξινόμησης μέσω υπολογισμού του κυρτού περιβλήματος που είχε ο *Shamos*, την οποία θα αναλύσουμε. Έστω, ότι μας ζητείται να ταξινομήσουμε μια λίστα από αριθμούς (x_1, x_2, \dots, x_n) όπου $\forall_i x_i \geq 0$: αυτό είναι το πρόβλημα A. Έστω, ότι έχουμε ένα αλγόριθμο B που υπολογίζει το κυρτό περίβλημα n σημείων σε χρόνο $T(n)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο B για να επιλύσουμε το πρόβλημα A σε χρόνο $T(n) + O(n)$, όπου ο επιπλέον $O(n)$ χρόνος αντιστοιχεί στον χρόνο που απαιτείται για να μετατρέψουμε την λύση που δίνει ο B σε μια λύση του A. Από την δοθείσα λίστα αριθμών σχηματίζουμε ένα σύνολο από δισδιάστατα σημεία (x_i, x_i^2) .



Σχήμα 1.2: Η κατασκευή της παραβολής για την ταξινόμηση των σημείων

Τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο B για να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα. Προφανώς κάθε σημείο ανήκει στο περίβλημα. Βρίσκουμε το χαμηλότερο σημείο α του κυρτού περιβλήματος σε $O(n)$ χρόνο: το σημείο αυτό αντιστοιχεί στο μικρότερο x_i .

Επιπλέον, η σειρά με την οποία τα σημεία συναντώνται στο σύνολο του περιβλήματος (με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού) μετά το α αντιστοιχεί στην ταξινομημένη σειρά τους. Δηλαδή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα αλγόριθμο για το κυρτό περίβλημα για να ταξινομήσουμε σε $T_n + O_n$ χρόνο. Δεδομένου ότι η ταξινόμηση απαιτεί χρόνο $\Omega(n \log n)$, τότε $T_n = \Omega(n \log n)$.

Παρατηρούμε ότι είναι καθοριστικό στην παραπάνω αναγωγή, ο αλγόριθμος B να επιστρέφει στις κορυφές του περιβλήματος με την σειρά που συναντώνται κατά μήκος του συνόρου του. Δεν είναι καθόλου προφανές πως μπορεί να επιτευχθεί μια τέτοια αναγωγή από την ταξινόμηση στο πρόβλημα υπολογισμού των ακραίων σημείων του περιβλήματος (τα οποία επιστρέφονται με τυχαία σειρά). Το ερώτημα, εάν ο υπολογισμός των ακραίων σημείων είναι εφικτός σε λιγότερο από $n \log n$ χρόνο, παρέμεινε αναπάντητο για αρκετά χρόνια, μέχρις ότου η εργασία αρκετών ερευνητών οδήγησε σε ένα $\Omega(n \log n)$ κάτω φράγμα και για αυτό το περίβλημα.

Ας δούμε ένα θεώρημα και δυο ακόμα ορισμούς για να κατανοήσουμε καλύτερα το κυρτό περίβλημα.

Θεώρημα 1. Το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου n σημείων στο επίπεδο υπολογίζεται σε χρόνο $O(n \log n)$.

Απόδειξη. Η ορθότητα του αλγορίθμου θα εκτεθεί για το άνω τμήμα του περιβλήματος. Ο αλγόριθμος τηρεί σε κάθε βήμα μια συνεκτική αλυσίδα ακμών, όπου παρατηρούνται μόνο κλίσεις από δεξιά. Λόγω της λεξικογραφικής ταξινόμησης, η αλυσίδα ξεκινά από το δεξιότερο και καταλήγει στο αριστερόστροφο σημείο του συνόλου P . Εφόσον κάθε καινούργια εκδοχή της αλυσίδας βρίσκεται «ψηλότερα» από όλες τις προηγούμενες, όσα σημεία ελέγχθηκαν και δεν ανήκουν στην αλυσίδα, βρίσκονται σίγουρα κάτω από αυτή. Η μόνη περίπτωση που θα μπορούσε κάποιο σημείο q να εντοπιστεί πάνω από την αλυσίδα θα συνέβαινε αν το q βρισκόταν στην κάθετη ζώνη μεταξύ των τελευταίων κορυφών της αλυσίδας. Αυτό όμως αποκλείεται. \square

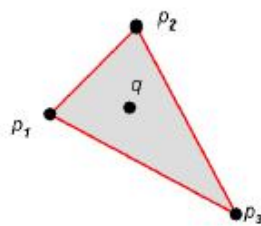
Ορισμός

Ορισμός 1. Κυρτό περίβλημα ενός πεπερασμένου συνόλου P από n σημεία στο επίπεδο είναι η κοινή τομή των κυρτών πολυγώνων που καθένα περικλείει όλα τα σημεία του P .

Προφανώς, το κυρτό περίβλημα είναι το μικρότερο (σε επιφάνεια) κυρτό σύνολο σημείων στο επίπεδο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του P . Αποδεικνύεται ότι το κυρτό περίβλημα είναι το μοναδικό κυρτό πολύγωνο, που έχει ως κορυφές σημεία του P και περικλείει όλα τα σημεία του P . Μια ισοδύναμη έκφραση του κυρτού περιβλήματος είναι ο ορισμός του κυρτού γραμμικού συνδυασμού που ακολουθεί.

Ορισμός

Ορισμός 2. Ως γραμμικός συνδυασμός n σημείων p_1, p_2, \dots, p_n στο επίπεδο ορίζεται το άθροισμα $\sum \lambda_i p_i$. Αν $\forall_i, \lambda_i \geq 0$ και $\sum \lambda_i = 1$, τότε ο γραμμικός συνδυασμός καλείται κυρτός. Το κυρτό περίγραμμα ενός συνόλου σημείων είναι ακριβώς το σύνολο όλων των δυνατών κυρτών συνδυασμών τους (επόμενο σχήμα).



Σχήμα 1.3: Κάθε σημείο q εντός του τριγώνου εκφράζεται ως κυρτός γραμμικός συνδυασμός των κορυφών p_1, p_2, p_3

1.0.2 Γεωμετρικές εφαρμογές ^[10]

Πριν ασχοληθούμε με τη γεωμετρική υφή του προβλήματος, μπορούμε να δούμε μερικές εφαρμογές οι οποίες προέρχονται από τα πεδία της υπολογιστικής γραφιστικής, της ρομποτικής και των γεωγραφικών συστημάτων πληροφοριών.

Υπολογιστική γραφιστική. Η υπολογιστική γραφιστική ασχολείται με τη δημιουργία εικόνων, τυποποιημένων σκηνών, με σκοπό την προβολή τους μέσω οθόνης, εκτυπωτή, ή κάποιας άλλης συσκευής εξόδου. Δεδομένου ότι οι εικόνες αποτελούνται από γεωμετρικά αντικείμενα, οι γεωμετρικοί αλγόριθμοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην υπολογιστική γραφιστική. Τα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να αποτελούνται από δισδιάστατα σχέδια (ευθείες, πολύγωνα) έως τρισδιάστατες σκηνές που περιέχουν πηγές φωτός, αντικείμενα διαφορετικής υφής κ.ο.κ. Μια σκηνή αυτού του τύπου μπορεί να περιλαμβάνει πάνω από ένα εκατομμύριο πολύγωνα ή τμήματα καμπύλων επιφανειών. Στα γραφικά, αλλά και στην τεχνική όραση, η απόκρυψη των κρυμμένων αντικειμένων μια εικόνας ανάγεται στην κατασκευή της διάταξης των αντικειμένων στην εικόνα. Με τον όρο «διάταξη» ενός συνόλου αντικειμένων εννοούμε πως θέλουμε να εκφράσουμε τα αντικείμενα με αποτελεσματικό τρόπο, ώστε να επιτρέψουμε ορισμένες ταχείες λειτουργίες σχετικά με την υποδιαίρεση του επιπέδου ή του χώρου που αυτά ορίζουν. Επίσης, όταν εκτοξεύονται ακτίνες από σημείο (ray shooting) και επιθυμούμε να υπολογίσουμε το πρώτο αντικείμενο που συναντούν, το πρόβλημα λύνεται άμεσα αν υπολογιστεί η διάταξη των δεδομένων αντικειμένων.

Ρομποτική. Το πεδίο της ρομποτικής ασχολείται με τη μελέτη και λειτουργία των ρομπότ. Τα ρομπότ είναι γεωμετρικά αντικείμενα που λειτουργούν σε τρισδιάστατο περιβάλλον και στη διαχείρισή τους ανακύπτουν πολλά γεωμετρικά προβλήματα. Ο σχεδιασμός της κίνησης είναι μόνο ένα πρόβλημα στο σχεδιασμό των εργασιών. Το ζητούμενο στη λειτουργία ενός ρομπότ θα ήταν να του αναθέσει κανείς λειτουργίες υψηλού επιπέδου «καθάρισε το δωμάτιο» και να το αφήνει μόνο του να επινοήσει τον καλύτερο τρόπο να το κάνει. Βέβαια αυτό προϋποθέτει το σχεδιασμό των κινήσεων, σχεδιασμό της σειράς εκτέλεσης των επιμέρους εργασιών κ.ο.κ. Επίσης σημαίνει ότι πρέπει να αποφασίσουμε αν το ρομπότ μπορεί να κινηθεί από ένα δεδομένο σημείο σε ένα άλλο, και να βρεθεί μια διαδρομή από το αρχικό στο τελικό σημείο που να αποφεύγει τα εμπόδια. Η πλοήγηση ανάμεσα σε πολυγωνικά εμπόδια μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσω της διάταξης ευθυγράμμων τμημάτων.

Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών. Ένα γεωγραφικό σύστημα πληροφοριών φέρει αποθηκευμένες ανθρωπογενείς δομές π.χ πόλεις, δρόμους, σιδηροδρομικά και ηλεκτρικά δίκτυα, καθώς και γεωγραφικά δεδομένα, όπως το ύψος των βουνών, η ροή των ποταμών, στοιχεία για τον πληθυσμό κ.ο.κ. Λόγω του ότι οι περισσότερες πληροφορίες αφορούν ιδιότητες σημείων και περιοχών στην επιφάνεια της Γης, τα γεωμετρικά προβλήματα που εμφανίζονται είναι πάρα πολλά. Επιπλέον ο όγκος των δεδομένων είναι τόσο μεγάλος που οι αλγόριθμοι θα πρέπει να έχουν σύντομο χρόνο εκτέλεσης. Το τυπικότερο πρόβλημα είναι η εύρεση όλων των σημείων, τα οποία βρίσκονται σε δεδομένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο επίπεδο ή σε δεδομένο παραλληλεπίπεδο στον χώρο. Επίσης ένα άλλο ερώτημα αφορά την εύρεση του πλησιέστερου γείτονα δεδομένου σημείου. Η υποδιαίρεση του επιπέδου σε περιοχές που βρίσκονται πιο κοντά σε μια κεραία εκπομπής, ή σε ένα νοσοκομείο, μπορεί να αναχθεί στην κατασκευή του διαγράμματος Voronoi, γνωστό και ως πρόβλημα του ταχυδρόμου, διότι αποτυπώνει τις σχέσεις γειτονίας σε ένα σύνολο σημείων.

1.1 Αλγόριθμοι κατασκευής κυρτού περιβλήματος σε δύο διαστάσεις

1.1.1 Ο αλγόριθμος του Graham [1]

Στο τέλος της δεκαετίας του 1960 μια εφαρμογή απαιτούσε τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος 10.000 σημείων στο επίπεδο και ο τετραγωνικός αλγόριθμος που υπήρχε απαιτούσε πολύ χρόνο. Με αφορμή την ανάγκη ενός ταχύτερου αλγόριθμου, ο μαθηματικός Ronald Graham το 1972 επινόησε ένα αλγόριθμο, ο οποίος αποτελεί έναν τρόπο σάρωσης για τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων στο επίπεδο και υπολόγιζε το κυρτό περίβλημα σε χρόνο $O(n \log n)$.

Ο τρόπος λειτουργίας του είναι να βρίσκει όλες τις κορυφές του κυρτού περιβλήματος με την εξής διαδικασία:



Σχήμα 1.4: Ο Αλγόριθμος του Graham

Στην αρχή ο αλγόριθμος βρίσκει το σημείο με τη χαμηλότερη x -συντεταγμένη. Εάν η χαμηλότερη x -συντεταγμένη υπάρχει σε περισσότερα από ένα σημεία του συνόλου, το σημείο με τη χαμηλότερη συντεταγμένη επιλέγεται από τα υποψηφία σημεία. Καλούμε αυτό το σημείο P_1 . Αυτό το βήμα έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(n)$, όπου (n) είναι το πλήθος των σημείων αυτών.

Στη συνέχεια, το σύνολο των σημείων θα πρέπει να ταξινομηθεί με αύξουσα σειρά. Οποιοσδήποτε γενικού σκοπού αλγόριθμος ταξινόμησης είναι κατάλληλος για 'αυτό, για παράδειγμα ο `heapsort` του οποίου η χρονική πολυπλοκότητα είναι $O(n \log n)$.

Ο αλγόριθμος προχωρεί εξετάζοντας καθένα από τα σημεία στην ταξινόμηση με αλληλουχία. Για κάθε σημείο προσδιορίζεται αν κινείται σε σχέση με τα δυο προηγούμενα σημεία εξετάζοντας εάν σε αυτό το σημείο πραγματοποιείται μια «αριστερή στροφή» ή μια «δεξιά στροφή». Εάν είναι μια «δεξιά στροφή» σημαίνει ότι το τελευταίο σημείο δεν αποτελεί μέρος του κυρτού περιβλήματος και θα πρέπει να αφαιρεθεί από την εξέταση. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για όσο διάστημα το σύνολο των τριών τελευταίων σημείων είναι μια «δεξιά στροφή». Μόλις μια «αριστερή στροφή» συναντάται, ο αλγόριθμος κινείται στο επόμενο σημείο με την ταξινόμηση (αν σε οποιοδήποτε στάδιο τα τρία σημεία είναι συν ευθειακά, μπορεί κανείς να επιλέξει κάποιο από τα σημεία ή να το απορρίψει δεδομένου ότι σε ορισμένες εφαρμογές απαιτείται να βρούμε όλα τα σημεία στα όρια του κυρτού περιβλήματος.)

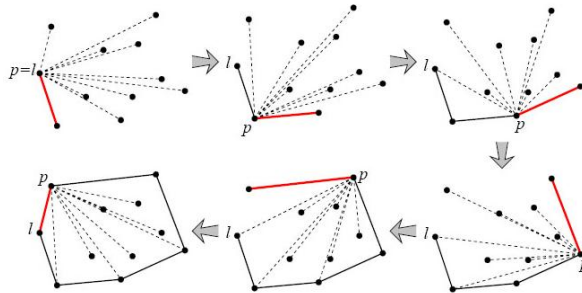
Ο αλγόριθμος του Graham για το ΚΠ2 :

Algorithm 1 Ο Αλγόριθμος του Graham για τις δυο διαστάσεις

- 1: Ταξινόμησε τα σημεία κατά x - συντεταγμένη και ονόμασε το αρχικό p_1
 - 2: Ταξινόμησε όλα τα άλλα σημεία με βάση την γωνία γύρω από το p_1 (όπου μεταξύ σημείων με την ίδια γωνία προηγείται αυτό που είναι πιο κοντά στο p_1) και έστω τα σημεία κατά αύξουσα σειρά είναι p_1, \dots, p_{n-1}
 - 3: **for all** $i = 3 \omega \zeta n$ και $Orient(p_1, S.first, S.second) \leq 0$ **do**
 - 4: Αφαίρεσε ένα σημείο από την στοίβα S
 - 5: πρόσθεσε το p_i στην S
 - 6: **end for**
-

1.1.2 Ο αλγόριθμος του Jarvis [2]

Ο αλγόριθμος του Jarvis δημοσιεύτηκε το 1973 και έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(nh)$, όπου n είναι ο αριθμός των σημείων και το h ο αριθμός επαναλήψεων για την ολοκλήρωση της διαδικασίας για την εύρεση των σημείων του κυρτού περιβλήματος. Η ιδέα είναι ότι αφού βρεθεί ένα σημείο που είναι κορυφή του κυρτού περιβλήματος, τότε να υπολογίζεται από τη τελευταία κορυφή η επόμενη στην ακολουθία κορυφών του κυρτού περιβλήματος.



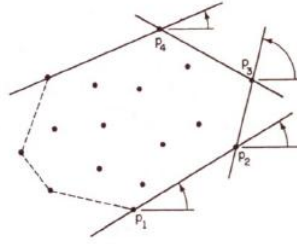
Σχήμα 1.5: Ο Αλγόριθμος του Jarvis

Ο αλγόριθμος ξεκινά με $i = 0$ από ένα σημείο p_0 συνήθως από αυτό που έχει την μικρότερη x - συντεταγμένη, εντοπίζοντας την πρώτη κορυφή του περιβλήματος αποτελώντας την αρχικοποίηση του αλγορίθμου. Στην συνέχεια εντοπίζει την δεύτερη κορυφή, δηλαδή, ορίζει τη πρώτη ακμή του κυρτού περιβλήματος σε γραμμικό χρόνο. Ο αλγόριθμος επισκέπτεται όλες τις κορυφές του κυρτού περιβλήματος με αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού και, καθώς έχει όλα τα άλλα σημεία αριστερά του, συνεχίζει μέχρι να βρει το επόμενο σημείο p_{i-1} που θα έχει και αυτό όλα τα άλλα σημεία αριστερά του. Το σημείο αυτό θα βρεθεί συγκρίνοντας τις πολικές γωνίες όλων των σημείων σε σχέση με το σημείο p_i .

Ας δούμε πιο αναλυτικά την διαδικασία εύρεσης του κυρτού περιβλήματος με τον αλγόριθμο του Jarvis. Υποθέτουμε ότι βρίσκουμε το κατώτερο σημείο p_1 από το σύνολο σημείων S . Αυτό το σημείο είναι οπωσδήποτε ένα σημείο του κυρτού περιβλήματος και επιθυμούμε να βρούμε το επόμενο συνεχόμενο σημείο p_2 του περιβλήματος. Το σημείο p_2 είναι ένα σημείο που έχει ελάχιστη πολική γωνία ≥ 0 του p_1 .

Κατά το ίδιο τρόπο το επόμενο σημείο p_3 έχει ελάχιστη πολική γωνία σε σχέση με το p_2 το οποίο θεωρεί αρχικό σημείο και κάθε επιτυχές σημείο μπορεί να βρεθεί σε γραμμικό χρόνο. Ο αλγόριθμος του Jarvis θα «παρελάσει» από το κυρτό περίβλημα βρίσκοντας τα σημεία με την σειρά ένα - ένα την φορά.

Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται κάθε κομμάτι του κυρτού περιβλήματος (μια πολυγωνική αλυσίδα) από το κατώτερο σημείο p_1 στο ανώτερο σημείο p_4 . Για να ολοκληρωθεί το κυρτό



Σχήμα 1.6: ο αλγόριθμος του Jarvis's για την κατασκευή του κυρτού περιβλήματος

περίβλημα κατασκευάζεται η πολυγωνική αλυσίδα από το ανώτερο σημείο στο κατώτερο σημείο. Προγραμματίζοντας τη συμμετρία των δύο αυτών βημάτων θα πρέπει να αναστρέψουμε την πορεία των δυο αξόνων και να αναφερόμαστε στην ελάχιστη πολική γωνία με αναφορά στην αρνητική x -axis

Ανάλυση του αλγόριθμου Jarvis για το ΚΠ2 :

Είσοδος: Σύνολο S αποτελούμενο από n σημεία στο επίπεδο

Έξοδος: Η αλυσίδα των ακμών και κορυφών του κυρτού περιβλήματος

1. Αρχικοποίησε τη τρέχουσα κορυφή $r = r_0$ με το αριστερότερο σημείο, δηλαδή με το σημείο το οποίο έχει την ελάχιστη τετμημένη. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία, επέλεξε αυτό με την ελάχιστη τεταγμένη.
2. Αρχικοποίησε την αλυσίδα κορυφών με το r και θέσε $S \leftarrow S - \{r\}$
3. Έστω r η τρέχουσα κορυφή και $u \in S$ ένα οποιοδήποτε σημείο που δεν έχει επιλεγεί ως κορυφή. Για κάθε σημείο $t \in S - \{u\}$, δηλαδή δεν ανήκει στο σύνολο των γνωστών κορυφών
 - a. αν ισχύει $CW(r, u, t)$
 - b. ή αν τα (r, u, t) είναι συνευθειακά και το u είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (r, t)
 τότε θέσε $u \leftarrow t$
4. Αν $u = r_0$ τερμάτισε, αλλιώς:
5. $r \leftarrow u, S \leftarrow S - \{r\}$, πρόσθεσε στην αλυσίδα κορυφών το r , και συνέχισε στο βήμα 3.

1.1.3 Ο αλγόριθμος του Chan ^[3]

Ο αλγόριθμος του Chan είναι ένας βέλτιστος ευαίσθητος εξόδου αλγόριθμος που υπολογίζει το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων P στις δύο διαστάσεις. Αλγόριθμος ευαίσθητος εξόδου χαρακτηρίζεται ο αλγόριθμος που η χρονική πολυπλοκότητά του εξαρτάται από το μέγεθος εισόδου και εξόδου του περιβλήματος. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ο χρόνος υπολογισμού ενός κυρτού περιβλήματος εξαρτάται και από την ταξινόμηση των σημείων γιατί δεν μπορεί να είναι μικρότερος από $\Omega(n \log n)$.

Ο αλγόριθμος του Jarvis δείχνει ότι για να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα με χρόνο $O(nh)$ θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν τον αριθμό όλων των σημείων n και τον αριθμό των επαναλήψεων h .

Το 1980 οι Kirkpatrick και Seidel επινόησαν έναν αλγόριθμο ευαίσθητος εξόδου που υπολογίζει το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου σημείων χρησιμοποιώντας μια μέθοδο ταξινόμησης

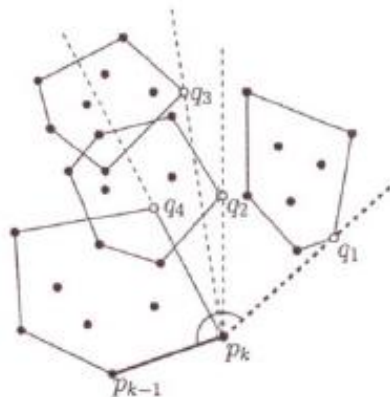
των σημείων με χρονική πολυπλοκότητα $O(n \log h)$, όπου n ο αριθμός όλων των σημείων του συνόλου P και h ο αριθμός των σημείων του κυρτού περιβλήματος.

Ο αλγόριθμος του Chan συνδυάζει τον αλγόριθμο του Graham, με χρονική πολυπλοκότητα $O(n \log n)$, με τον αλγόριθμο του Jarvis για πετύχει μια χρονική πολυπλοκότητα $O(n \log h)$. Ο αλγόριθμος του Chan είναι αξιόλογος, διότι μπορεί να εφαρμοστεί στην κατασκευή κυρτών περιβλημάτων και στις τρεις διαστάσεις. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο για την κατασκευή του κυρτού περιβλήματος στις δυο διαστάσεις.

Τα στάδια που ακολουθεί ο αλγόριθμος του Chan είναι τα εξής: (α) διαιρεί το σύνολο των σημείων P σε μικρότερα υποσύνολα, (β) κατασκευάζει το κυρτό περίβλημα για κάθε υποσύνολο, (γ) συνδυάζει τα κυρτά περιβλήματα κατασκευάζοντας το συνολικό κυρτό περίβλημα.

Ανάλυση αλγορίθμου Chan:

Ο αλγόριθμος του Chan για ένα σύνολο σημείων P ξεκινά διαιρώντας τα σημεία σε ισομέγεθη ομάδες. Το σύνολο αυτών των ομάδων ισούται με $r = \lceil n/m \rceil$, όπου r ένας ακέραιος αριθμός. Το μέγεθος των ομάδων δεν το γνωρίζουμε, αλλά μπορούμε να το υποθέσουμε. Για το λόγο αυτό εισάγουμε την παράμετρο m που θα μας δείχνει ότι το μέγεθος των ομάδων θα έχει το πολύ m σημεία και σε κάθε περίπτωση η τιμή της παραμέτρου m θα κυμαίνεται μεταξύ $h \leq m \leq h^2$. Δηλαδή θα έχουμε $(r - 1)$ ομάδες με μέγεθος m και η τελευταία ομάδα θα έχει μέγεθος $(n - m)$ δηλαδή θα περιλαμβάνει όσα σημεία απομένουν. Για κάθε ομάδα υπολογίζουμε το κυρτό περίβλημά της χρησιμοποιώντας το αλγόριθμο του Graham με χρονική πολυπλοκότητα $O(m \log m)$, ενώ για τον υπολογισμό των ομάδων η συνολική χρονική πολυπλοκότητα θα είναι $O(rm \log m) = O(n \log m)$.



Σχήμα 1.7: Ο αλγόριθμος κατασκευής κυρτού περιβλήματος του Chan

Επειδή για την παράμετρο m ισχύει ότι έχει τιμή $m \leq h^2$, συνεπάγεται ότι η χρονική πολυπλοκότητα θα είναι $O(n \log h)$. Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε, ότι με τη μέχρι τώρα διαδικασία έχουμε υπολογίσει το κυρτό περίβλημα της κάθε ομάδας και όχι το συνολικό περίβλημα όλων των σημείων.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς μπορούμε να ενώσουμε αποδοτικά όλα τα περιβλήματα των ομάδων, για να κατασκευάσουμε το συνολικό κυρτό περίβλημα. Η λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Jarvis. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Jarvis βρίσκουμε το πρώτο σημείο του περιβλήματος που έχει την μικρότερη y -συντεταγμένη και σίγουρα ανήκει στο κυρτό περίβλημα. Το ερώτημα είναι πως βρίσκουμε το επόμενο σημείο.

Για κάθε κυρτό περίβλημα παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε την κορυφή q που μεγιστοποιεί την γωνία $p_{k-1}p_k$ σε χρόνο $\log m$

Σαν παρατήρηση μπορούμε να πούμε ότι σημείο q μπορεί να ανήκει στην ίδια ομάδα με το p_i . Αφού εξετάζουμε r κυρτά περιβλήματα συνεπάγεται ότι τα σημεία μπορούν να βρεθούν σε $O(r \log n)$ χρόνο και αυτό επαναλαμβάνεται για h βήματα. Η διαδικασία ολοκληρώνεται, όταν το σημείο εκκίνησης θα επιτευχθεί ξανά. Ο αλγόριθμος εξετάζει τα σημεία με την αντί ωρολογιακή φορά και τυλίγει τα σημεία σαν κορδέλα περιτυλίγματος.

Αναλύοντας το χρόνο εκτέλεσης ξέρουμε ότι ο αριθμός των σημείων στο τελικό περίβλημα είναι h γι' αυτό με τον αλγόριθμο του Jarvis χρειαζόμαστε h βήματα και το κάθε βήμα χρειάζεται $O(\log m)$ χρόνο για να υπολογιστεί οπότε ο συνολικός χρόνος για την συγχώνευση των φάσεων του αλγορίθμου θα είναι :

$$O(hr \log m) = O\left(h \frac{n}{m} \log m\right)$$

Συνδυάζοντας τα δυο μέρη θα έχουμε τελικά:

$$O\left(n \log m + h \frac{n}{m}\right) = O\left(\left(n + h \frac{n}{m}\right) \log m\right)$$

Από την υπόθεση που έχουμε κάνει ότι $h \leq m \leq h^2$ συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι $O(n \log h)$.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν γνωρίζουμε το μέγεθος του m , όταν εκτελείται ο αλγόριθμος.

Algorithm 2 Κυρτό Περίβλημα (P, m):

- 1: $r \leftarrow \lceil n/m \rceil$
 - 2: Διαιρούμε το σύνολο των σημείων P σε ομάδες σημείων P_1, P_2, \dots, P_r καθεμία από τις οποίες έχει μέγεθος m το πολύ.
 - 3: **for** ($i \leftarrow 1$ έως r) υπολόγισε το κυρτό περίβλημα P_i χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Graham **do**
 - 4: Έστω $p_0 \leftarrow (-\infty, 0)$ και ονόμασε p_1 το σημείο που βρίσκεται χαμηλότερο στη y - συντεταγμένη.
 - 5: **for all** $k \leftarrow 1$ έως m **do**
 - 6: α) Υπολόγισε το σημείο $q_i \in \text{ConvexHull}(P_i)$ το οποίο μεγιστοποιεί τη γωνία $\angle p_{k-1} p_k q_i$
 - 7: β) Άσε το p_{k+1} να είναι το σημείο $q \in q_1, \dots, q_r$ το οποίο μεγιστοποιεί τη γωνία $\angle p_{k-1} p_k q$
 - 8: γ) Εάν $p_{k+1} \leftarrow p_1$ τότε επέστρεψε p_1, \dots, p_k
 - 9: **end for**
 - 10: **end for**
 - 11: Ανέφικτο να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα μετά από m επαναλήψεις, οπότε επιστρέφουμε το μήνυμα "αποτυχία".
-

Στην παρούσα φάση δεν ξέρουμε ποια είναι η προοδευτική τιμή του h με αποτέλεσμα να μην ξέρουμε ποια θα είναι και η τιμή του m κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου. Αναλύοντας το πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος θα βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Δίνουμε ένα σύνολο σημείων P , την παράμετρο m και θεωρούμε ότι, εάν $h \leq m$, τότε υπολόγισε το περίβλημα, αλλιώς συμπέρανε « αποτυχία ».

Απομένει να υπολογίσουμε το μέγεθος της παραμέτρου m . Ο υπολογισμός της είναι σημαντικός, διότι ο αλγόριθμος του Chan σταματάει και ξεκινάει τη διαδικασία κατασκευής του κυρτού περιβλήματος μέχρις ότου βρεθεί η σωστή τιμή της παραμέτρου m . Η διαδικασία εύρεσης της σωστής τιμής για την παράμετρο m είναι η εξής:

Για να βρούμε την τιμή της m βάζουμε διαδοχικές τιμές $m = 1, 2, 3, \dots$, μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη $m \geq h$, αλλά αυτή η διαδικασία αργεί. Η μέθοδος της δυαδικής αναζήτησης για τιμές

του m βοηθά περισσότερο από την γραμμική μέθοδο, αλλά το αρνητικό αυτής είναι ότι ο χρόνος εκτέλεσης της είναι $O(n \log n)$ και χαρακτηρίζεται αργός. Για να το αποφύγουμε αρχίζουμε δίνοντας την τιμή $m = 1$ και στη συνέχεια διπλασιάζουμε την τιμή μέχρι να το πετύχουμε.

Ο χρόνος εκτέλεσης της διαδικασίας αυτής είναι $O(n \log^2 h)$, ο οποίος είναι καλός αλλά όχι αρκετά. Ο Chan προσέγγισε την διαδικασία αυτή διπλασιάζοντας την προηγούμενη τιμή του m μέχρι ο αλγόριθμος επιστρέψει ένα σωστό αποτέλεσμα. Οπότε η ακολουθία των τιμών θα είναι :

$$m = 2, 4, 16, \dots, = 2^1, 2^2, 2^4, \dots$$

Algorithm 3 Ο αλγόριθμος του Chan για $\text{conv}(P)$ όλων των σημείων του P

- 1: $m \leftarrow 2$. $L \leftarrow$ αποτυχία.
 - 2: **while** $L \neq$ αποτυχία **do**
 - 3: α) Θέσε $m \leftarrow \min(m^2, n)$.
 - 4: β) $L \leftarrow \text{conv}(P, m)$.
 - 5: **end while**
 - 6: Επέστρεψε το L .
-

Ας θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στην i -οστή επανάληψη του αλγόριθμου. Η τιμή της m την i -οστή επανάληψη είναι 2^{2^i} (κάθε επανάληψη διπλασιάζει τον εκθέτη). Γι' αυτό η i -οστή επανάληψη χρειάζεται χρόνο $O(n \log 2^{2^i})$, οπότε ο χρόνος είναι $O(n 2^i)$. Ξέρουμε ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει όταν η τιμή φτάσει στο σημείο $2^{2^i} \geq h$ και αυτό συμβαίνει εάν $i = \lceil \log \log h \rceil$.

Υπολογίζοντας ότι :

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι:

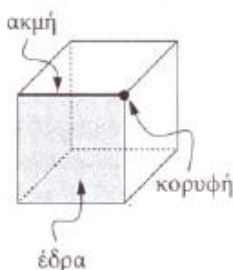
$$\sum_{i=1}^{\log \log h} n 2^i = n \sum_{i=1}^{\log \log h} 2^i \leq n 2^{1+\log \log h} = 2n 2^{\log \log h} = 2n \log h = O(n \log h),$$

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος στις τρεις διαστάσεις

Αν το σύνολο P περιλαμβάνει n σημεία σε τρεις διαστάσεις, τότε το τρισδιάστατο $3D$ κυρτό περίβλημα είναι το μικρότερο πολυέδρο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του P και βεβαίως οι κορυφές του είναι σημεία του P , κατ' αντιστοιχία με το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις. Φυσικά, ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε $d > 3$ διαστάσεις, οπότε γίνεται λόγος για d -διάστατα κυρτά πολύτροπα (*polytopes*).

Στις δύο διαστάσεις είδαμε ότι το κυρτό περίβλημα έχει το πολύ n κορυφές, καθώς ορίσαμε ότι το κυρτό περίβλημα ενός συνόλου P , από n , σημεία στο επίπεδο είναι ένα κυρτό περίβλημα του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του P . Επίσης στην δισδιάστατη περίπτωση, η πολυπλοκότητα του κυρτού περιβλήματος εξαρτάται από το πλήθος των ακμών του πολυγώνου όπου ισούνται με το πλήθος των κορυφών. Στις τρεις διαστάσεις αυτό δεν ισχύει καθώς το πλήθος των ακμών ενός πολυέδρου μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των κορυφών.



Σχήμα 2.1: Πολυπλοκότητα κυρτών περιβλημάτων στον τρισδιάστατο χώρο

2.1 Πολύεδρα ^[10]

Ένα πολυέδρο είναι μια περιοχή του χώρου που περικλείεται από ένα πεπερασμένο πλήθος από επίπεδες πολυγωνικές έδρες, οι οποίες ανά δυο είτε δεν έχουν κοινά σημεία, είτε συναντώνται σε κοινές κορυφές ή ακμές. Το σύνορο ενός πολυέδρου αποτελείται από α) τις κορυφές β) τις ακμές και γ) τις έδρες.

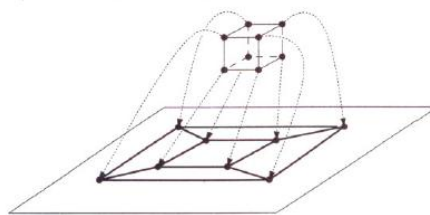
Στο τρισδιάστατο χώρο, κάθε έδρα αντιστοιχεί σε ένα μονοδιάστατο σύνολο εσωτερικών καθέτων. Κάθε ακμή αντιστοιχεί σε ένα κώνο καθέτων που ανήκει σε ένα επίπεδο κάθετο ως προς

την ακμή, και έχει διάσταση 2. Οι κορυφές του πολυέδρου αντιστοιχούν σε ένα κώνο καθέτων διάστασης 3.

2.1.1 Ο τύπος του Euler

Ο Euler παρατήρησε μια μαθηματική σχέση που συνδέει το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών ενός πολυέδρου. Παρατήρησε ότι το άθροισμα του πλήθους κορυφών και εδρών ισούται με το πλήθος των ακμών συν δύο. Εάν συμβολίσουμε τον πλήθος των κορυφών με V , το πλήθος των ακμών με E και το πλήθος των εδρών με F , τότε ο τύπος του Euler θα είναι :

$$V - E + F = 2$$



Σχήμα 2.2: Κύβος ερμηνευόμενος ως επίπεδο γράφημα

2.1.2 Απόδειξη τύπου του Euler

Η απόδειξη αποτελείται από τρία μέρη:

1. μετασχηματίσουμε την επιφάνεια του πολυέδρου σε επίπεδο γράφημα
2. αποδεικνύουμε το θεώρημα με δέντρα
3. αποδεικνύουμε το θεώρημα με επαγωγή

Στην αρχή "απλώνουμε" την επιφάνεια του πολυέδρου με την ακόλουθη διαδικασία. Εάν επιλέξουμε μια έδρα F του P και την αφαιρέσουμε αφήνοντας μια τρύπα στην επιφάνεια, και τεντώσουμε το χείλος αυτής της επιφάνειας μέχρι να γίνει μεγαλύτερη από το P . Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε τον τύπο του Euler για την ειδική περίπτωση που το γράφημα G είναι δέντρο με V κορυφές και E ακμές. Θα ισχύει $V = E + 1$. Επιπλέον το δέντρο ορίζει μια μόνο περιοχή, δηλαδή, $F = 1$. Τότε ο τύπος του Euler προκύπτει :

$$V - E + F = (E + 1) - E + 1 = 2$$

Το τρίτο βήμα βασίζεται σε επαγωγή στο πλήθος ακμών του γραφήματος. Έστω ότι ο τύπος ισχύει για όλα τα γραφήματα με το πολύ $E - 1$ ακμές, και έστω ένα γράφημα G με V κορυφές και E ακμές και F περιοχές. Εάν το G έχει ένα κύκλο, θεωρούμε μια ακμή e αυτού του κύκλου. Το γράφημα $G' = G - e$ παραμένει συνεκτικό και έχει V κορυφές, $E - 1$ ακμές και $F - 1$ περιοχές: η αφαίρεση της e ενώνει δυο περιοχές σε μία. Τότε με βάση την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε :

$$V - (E - 1) + (f - 1) = 2 \Leftrightarrow V - E + F = 2$$

Τέλος θα δείξουμε ότι ο τύπος του Euler συνεπάγεται ότι το πλήθος κορυφών, το πλήθος των ακμών και το πλήθος των εδρών ενός πολυέδρου συνδέονται γραμμικά : εάν $V = n$, τότε $E = O(n)$ και $F = O(n)$. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε το n κάπως πιο ελεύθερα στην ανάλυση πολυπλοκότητας αλγορίθμων που εκτελούνται σε πολύεδρα.

Για λόγους απλοποίησης της απόδειξης, θεωρούμε ότι κάθε έδρα του πολυέδρου έχει χωριστεί σε τρίγωνα: αυτό αυξάνει τα E και F , αλλά όχι και το $V = n$ ως προς το οποίο θέλουμε να εκφράσουμε τα άνω φράγματα των E και F . Εάν αθροίσουμε όλες τις ακμές έδρα προς έδρα, το τελικό άθροισμα που υπολογίζουμε είναι $3F$, αφού κάθε έδρα έχει τρεις ακμές. Το άθροισμα αυτό ισούνται με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών, αφού κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες. Δηλαδή, $3F = 2E$. Αντικαθιστώντας αυτή την σχέση με τον τύπο του Euler βρίσκουμε :

$$V - E + 2E/3 = 2 \Leftrightarrow V - 2 = E/3 \Leftrightarrow E = 3V - 6 = O(n)$$

Αντίστοιχα,

$$F = 2E/3 = 2V - 4 = O(n)$$

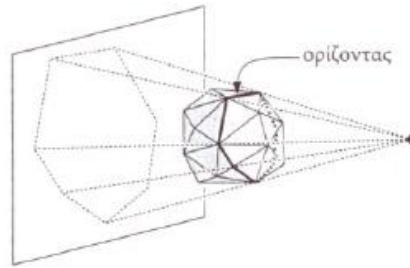
Συνοψίζοντας έχουμε ότι : για ένα πολύεδρο με $V = n$ κορυφές, E ακμές, F έδρες και genus 0, $V - E + F = 2$ και τόσο το E όσο και το F είναι $O(n)$.

2.2 Κατασκευή κυρτών περιβλημάτων στις τρεις διαστάσεις

2.2.1 Ανάλυση Randomized Incremental Algorithms για κυρτά περιβλήματα τριών διαστάσεων και Διαίρεση τριγώνων δυο διαστάσεων [6]

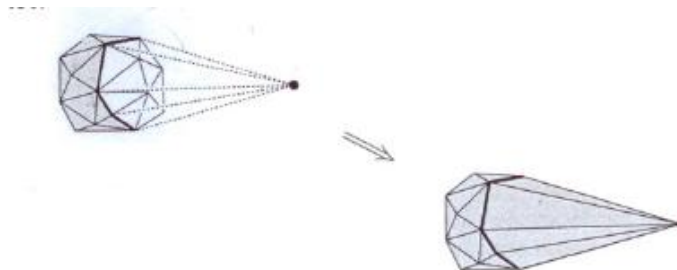
Και οι δύο αλγόριθμοι βασίζονται σε μια βοηθητική δομή δεδομένων η οποία αποθηκεύει τις διενέξεις οι οποίες είναι μη επεξεργασμένα δεδομένα τα οποία έρχονται σε διένεξη με συγκεκριμένα στοιχεία της κατασκευαστικής δομής.

Στην περίπτωση του κυρτού περιβλήματος, οι διενέξεις δημιουργούνται μεταξύ μια έδρας του περιβλήματος (συνήθως ένα τρίγωνο) και ένα μη επεξεργασμένο σημείο, ενώ στην περίπτωση των μετασχηματισμών της διαίρεσης τριγώνων (Delaunay) είναι μεταξύ ενός τριγώνου του υπάρχοντος μετασχηματισμού, και ενός μη επεξεργασμένου σημείου. Και στις δύο περιπτώσεις, η δομή διατηρείται, είναι λογικά ισοδύναμη με διμερές γράφημα, με μή επεξεργασμένα σημεία στην μία πλευρά και έδρες (τρίγωνα) στην άλλη πλευρά, και μία άκρη ενώνει ένα σημείο με μια γωνία, εάν το σημείο δημιουργεί διένεξη με την γωνία και στις δυο περιπτώσεις, αυτό το σημείο, όταν επεξεργάζεται, θα εξαλείφει την έδρα εάν ακόμα υπάρχει. Και στους δυο αλγόριθμους, ο γράφος συγκρούσεων χρησιμοποιείται για την επίλυση των βοηθητικών εργασιών. Στο πρόβλημα του κυρτού περιβλήματος, χρησιμοποιείται για να αναγνωρίζει όλες τις έδρες που πρέπει να απομακρυνθούν, και εμμέσως, τα άκρα του ορίζοντα, ενώ στο πρόβλημα Delaunay, χρησιμοποιείται για να εντοπίζει το τρίγωνο (στον παρόντα τριγωνισμό) που περιέχει το σημείο που μόλις προσθέσαμε.



Σχήμα 2.3:

Ο αλγόριθμος επεξεργασίας του κυρτού περιβλήματος ξεκινά χρησιμοποιώντας 4 σημεία που δεν κινούνται στο ίδιο επίπεδο, για να ορίσει το κυρτό τους περίβλημα το οποίο είναι ένα τετραέδρου. Υπολογίζει απευθείας την λίστα συγκρούσεων για κάθε μία από τις τέσσερις όψεις του τετραέδρου, θεωρώντας σταθερό τον χρόνο που χρειάζεται ανά (όψη, σημείο) ζευγάρι δοκιμής και θέτει ο ερώτημα, (το σημείο σε ποια πλευρά του οριζοντα βρίσκεται??) . Έτσι δημιουργεί τον γράφο συγκρούσεων σε γραμμικό χρόνο. Έπειτα συλλέγει επαναλαμβανόμενα τυχαία μη επεξεργασμένα σημεία p , και είτε τα απορρίπτει εάν βρίσκονται εντός του τρέχοντος περιβλήματος είτε ενημερώνει το τρέχον περίβλημα αντικατοπτρίζοντας το σημείο p , με επακόλουθη προσθήκη στα τρίγωνα της κορυφής του p και την βάση a του οριζοντα, και απομακρύνει τις κορυφές και τα γεγονότα στην λίστα συγκρούσεων του p . Για κάθε σημείο που εξετάζουμε μπορούμε να δούμε δυο διαφορετικές περιπτώσεις, α) το σημείο να ανήκει στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος που έχουμε κατασκευάσει με την διαδικασία που περιγράψαμε, οπότε και δεν έχουμε να κάνουμε τίποτα, και β) να μην ανήκει στο σύνορο. Εάν δεν ανήκει στο σύνορο, τότε εξετάζουμε εάν από το σημείο που βρίσκόμαστε μπορούμε να δούμε ή όχι κάποιες έδρες. Οι ορατές έδρες σχηματίζουν την « ορατή περιοχή» και περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη αποτελούμενη από ακμές του γεωμετρικού σχήματος που εξετάζουμε.

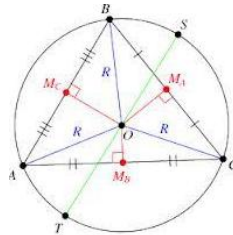


Σχήμα 2.4: Προσθήκη σημείου στο κυρτό περίβλημα

Ο αλγόριθμος της διαίρεσης τριγώνων Delaunay, ξεκινά χρησιμοποιώντας τρία επιπλέον σημεία, κατάλληλα επιλεγμένα για να φτιάξουν ένα τρίγωνο, τέτοιο μεγέθους που η τριγωνοποίηση των ήδη εισαχθέντων σημείων να μην μεταβάλλεται από την εισαγωγή καινούργιων σημείων. Προετοιμάζει την λίστα συγκρούσεων για το τρίγωνο, τοποθετώντας όλα τα σημεία που έχουν εισαχθεί. Έπειτα, επιλέγει τυχαία ένα μη επεξεργασμένο σημείο p , το εντοπίζει στο σωστό τρίγωνο, της υπάρχουσας τριγωνοποίησης, ας πούμε το τρίγωνο abc , χρησιμοποιώντας την λίστα των συγκρούσεων, και δια σπάει το υπάρχον τρίγωνο σε τρία μικρότερα τρίγωνα, τα pab , pac , και το abc , δημιουργώντας λίστες συγκρούσεων για αυτά τα τρίγωνα, διασπώντας την λίστα συγκρούσεων του τριγώνου abc και δοκιμάζοντας κάθε σημείο σε αυτή.

Έπειτα δοκιμάζει κάθε ένα από τα τρία καινούργια τρίγωνα. Η τεχνική που χρησιμοποιεί ονομάζεται περιγεγραμμένος κύκλος και θεωρεί ότι ένας κύκλος διέρχεται από τις τρεις κορυφές

ενός τριγώνου. Το κέντρο βρίσκεται στο σημείο όπου όλες οι διχοτόμοι τέμνονται και ονομάζεται περίκεντρο.



Σχήμα 2.5: Περίκεντρο

Πρέπει να σημειώσουμε ότι χρειάζεται να δοκιμάσουμε ένα σημείο απο κάθε καινούργιο τρίγωνο, η τρίτη κορυφή του απείραχτου παρακείμενου τριγώνου, για παράδειγμα, του τριγώνου pac χρειάζεται να δοκιμάσουμε μόνο την κορυφή q η οποία σχηματίζει το τρίγωνο qac και μοιράζεται τις ακμές ac . Εάν η δοκιμή στο τρίγωνο αποτύχει, π.χ στο τρίγωνο pac επειδή το σημείο q βρίσκεται μέσα στο περιγεγραμμένο κύκλο του pac με αποτέλεσμα η ακμή ac να απομακρύνεται και να αντικαθιστάτε με την ακμή pq , όπου χρειάζεται να ξανά κάνουμε την δοκιμή στα καινούργια τρίγωνα pqa και pqc κοιτάζοντας ένα σημείο και ούτω καθεξής.

Οι δύο αλγόριθμοι φαίνεται να έχουν την ίδια βαρύτητα αλλά αν δούμε πιο προσεκτικά διαφέρουν σε ορισμένες λεπτομέρειες, όπως την αναπαραγωγή των ακμών οι οποίες στρίβουν κατά την διάρκεια της διαίρεσης Delaunay, δεν υπάρχει κάτι ανάλογο στον αλγόριθμο εύρεσης του κυρτού περιβλήματος. Στην πραγματικότητα, ωστόσο, είναι κατά βάση ίδιοι και δουλεύουν μαζί. Η ανάλυση που είδαμε αφορά κυρτό περίβλημα σε τρεις διαστάσεις, αλλά ταυτόχρονα παρουσιάζεται σχεδόν ίδιος όταν έχουμε να κάνουμε με τον αλγόριθμο αναστροφών ακμών κατά την διάρκεια των τριγωνισμών Delaunay.

Ας δούμε τώρα αναλυτικά την λειτουργία του αλγορίθμου

Υπάρχουν δυο κύριες διεργασίες που πραγματοποιεί ο αλγόριθμος. Η μια έχει να κάνει με την δημιουργία καινούργιων εδρών, θεωρούμε ότι όλα τα σημεια που αποτελούν τα τρίγωνα δεν είναι συν επίπεδα καθώς και ότι δεν υπάρχουν τρία σημεια που να είναι συγραμικά. Η δεύτερη διεργασία αφορά την δημιουργία της λίστας συγκρούσεων. Όταν εισάγουμε ένα καινούργιο σημείο p_i στο κυρτό περίβλημα, ο αριθμός των καινούργιων εδρών που δημιουργούνται έχουν μαθηματική συσχέτιση με τον βαθμό των p_i στο κυρτό περίβλημα.

Το κυρτό περίβλημα, είναι ένα επίπεδο γράφημα, και απο την θεωρία γνωρίζουμε ότι σε ένα επίπεδο γράφημα με n τρίγωνα, ο αριθμός των τριγώνων είναι το πολύ $6n - 12$. Μετά τον μετασχηματισμό των i τριγώνων θα έχουμε $j \leq i$ τρίγωνα στο περίβλημα, και αυτό θα είναι ένα διασταυρωμένο γράφημα, με συνολικό βαθμό $6_j - 12$. Η τελευταία κορυφή που προστίθεται στο περίβλημα θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε απο τις κορυφές j σε αυτό, και έτσι ο αναμενόμενος βαθμός της κορυφής έχει σταθερό όριο $6 - a$.

Έτσι, σε κάθε βήμα, ο αναμενόμενος αριθμός κορυφών που προστίθεται είναι σταθερός, και ο συνολικός αριθμός των κορυφών που δημιουργούνται κατά την διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(n)$. Ειδικότερα, η δομή δεδομένων χρησιμοποιείται για να αποθηκεύσει το υπό κατασκευή περίβλημα σε χρόνο $O(n)$.

Η απομάκρυνση των κορυφών γίνεται σε σταθερό χρόνο ανά κορυφή, δεδομένου ότι, προσθέτοντας ένα σημείο p_i , απομακρύνουμε την κορυφή απο την λίστα συγκρούσεων του p_i . Χρειαζόμαστε να βρούμε τον ορίζοντα που προσδιορίζεται απο τον p_i , αλλά μπορούμε να δοκιμάσουμε κάθε ακμή του κάθε τριγώνου, στην λίστα συγκρούσεων του p_i - ακμή ορίζοντα, που

εξορισμού χρησιμοποιείται απο κοινού σε ένα τρίγωνο ορατό απο το p_i , και σε ένα τρίγωνο μη ορατό απο το p_i . Έτσι η διαδικασία δημιουργίας και καταστροφής κορυφών είναι γραμμική, με μια εξαίρεση, την δημιουργία της λίστας συγκρούσεων για τις καινούργιες ακμές.

Τώρα θα πρέπει να εξετάσουμε τις λίστες συγκρούσεων. Όταν προσθέτουμε ένα καινούργιο σημείο p_i στο περίβλημα στο βήμα i , προσδιορίζεται ένα ορίζοντας στο περίβλημα - μια πολυγωνική περίμετρο (η οποία φτιάχεται απο ένα κύκλο των ακμών του περιβλήματος) η οποία διαχωρίζει το μέρος του ορατού περιβλήματος, απο το μέρος του μη ορατού περιβλήματος. Ο αλγόριθμος δημιουργεί μια καινούργια έδρα για κάθε ακμή στο ορίζοντα. Εάν η ακμή ab είναι μια ακμή του ορίζοντα, τότε η καινούργια έδρα που θα ανταποκρίνεται σε αυτή θα είναι το τρίγωνο p_iab . Αλλά στο παλιό περίβλημα, η ακμή ab μοιραζόταν απο δυο τρίγωνα, τα abc και abd , και ένα απο τα δύο σημεία c και d ήταν ορατά απο την p_i και το άλλο όχι, ας πούμε ότι ήταν το c ορατό. Μετά όμως εξαλείφουμε το τρίγωνο abc , και το τρίγωνο abd να παραμένει όπως ήταν. Τα σημεία στην λίστα συγκρούσεων της καινούργια έδρας p_iab είναι τα σχηματίζουν ένα υποσύνολο των σημείων της ένωσης των λιστών συγκρούσεων των τριγώνων abc και abd . Απο την στιγμή που σχηματίζουμε την λίστα συγκρούσεων της p_iab κάνοντας έλεγχο κάθε σημείου της ένωσης των λιστών συγκρούσεων των abc και abd , ο χρόνος μας είναι γραμμικός στο μέγεθος της ένωσης. Έτσι αυτό που θέλουμε να αξιολογήσουμε είναι η αναμενόμενη τιμή του συνόλου, του μεγέθους των λιστών σύγκρουσης, ο οποίο είναι το σύνολο του μεγέθους των λιστών συγκρούσεων των καινούργιων εδρών που έχουν δημιουργηθεί.

Μπορούμε απλά να δούμε το μέγεθος των λιστών που έχουν δημιουργηθεί, απο το μέγεθος των δυο λιστών που χρησιμοποιούνται για την δημιουργία, επειδή είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την ποσότητα της μετατόπισης του δείκτη κατά 1, η οποία δεν επηρεάζει την ανάλυσή μας.

Ας εξετάσουμε την λίστα συγκρούσεων του τριγώνου Δ . Θέλουμε να υπολογίσουμε :

$$E[\sum_{\text{created } \Delta s} | CL(\Delta) |]$$

Ας δούμε πως έχουν διαμορφωθεί οι έδρες του κυρτού περιβλήματος μετά την ολοκλήρωση του βήματος i του αλγορίθμου.

$$E[\sum_{\text{created } \Delta s} | CL(\Delta) |] = E[\sum_{i=5}^n \sum_{\Delta \in T_i - T_{i-1}} | CL(\Delta) |]$$

όπου το απώτερο σύνολο, προέρχεται απο το πέμπτο σημείο, καθώς τα πρώτα τέσσερα σημεία χρησιμοποιήθηκαν για να ξεκινήσουν τον σχηματισμό του τετραέδρου. Το εσωτερικό σύνολο περιλαμβάνει όλα τα τρίγωνα που προστέθηκαν στο βήμα i - τρίγωνα που υπήρξαν στο περίβλημα μετά το βήμα i , αλλά όχι μετά το βήμα $i - 1$. Εφαρμόζοντας την αρχή της γραμμικότητας σε αυτά που περιμένουμε, μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση του συνόλου ως εξής:

$$E[\sum_{\text{created } \Delta s} | CL(\Delta) |] = \sum_{i=5}^n E[\sum_{\Delta \in T_i - T_{i-1}} | CL(\Delta) |]$$

Τώρα θα χρειαστεί να το αναλύσουμε περισσότερο, θα παρουσιάσουμε και να καταλάβουμε τις καινούργιες μεταβλητές $\Delta(i, q, p_i)$, και $\Delta(i, q)$. Η μεταβλητή $\Delta(i, q, p_i)$ είναι ο αριθμός των τριγώνων που έχουν το σημείο q στην λίστα συγκρούσεων κατά την ολοκλήρωση του βήματος i , ενώ το $\Delta(i, q, p_i)$ ο αριθμός των τριγώνων που έχουν το σημείο p_i ως μια απο τις τρεις κορυφές και ταυτόχρονα έχουν το σημείο q στην λίστα συγκρούσεων κατά την ολοκλήρωση του βήματος i . Τώρα θα έχουμε:

$$\sum_{i=5}^n E[| CL(\Delta) |] = \sum_{i=5}^n \left[\sum_q | E[(\Delta)(i, q, p_i)] \right]$$

το καινούργιο αποτέλεσμα σπάει τα σύνολα των σημείων σε μικρότερα υποσύνολα.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τίποτα δύσκολο. Το σύνολο των πρώτων i σημείων δεν είναι σταθερό στην παρακάτω έκφραση : μπορεί να είναι οποιοδήποτε απο τα

$$(n - 4)/i$$

υποσύνολα των σημείων i τα οποία διαλέγονται απο τα $n - 4$ σημεία μετά την έναρξη της διαδικασίας. Τώρα, καθώς ξεκινάμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση αντίστροφης φοράς, για να αποφύγουμε τα κρατούμενα λόγω αλληλουχίας των εξαρτώμενων πιθανοτήτων, παρατείνουνε την διαδικασία μέσω των i βημάτων. Έτσι δημιουργούμε το υποσύνολο των σημείων i το οποίο το ονομάζουμε P_i , και αυτό φτιάχνει τις πιθανές επιλογές για το q στο $\Delta(i, q, p_i)$. Τώρα θέλουμε να απομακρύνουμε την εξάρτηση απο το P_i . Ας σημειώσουμε ότι διαλέγουμε αυθαίρετα τρίγωνα τα οποία έχουν στην λίστα συγκρούσεων τους το σημείο q , την πιθανότητα τα τρίγωνα αυτά να έχουν P_i ως μια απο τις τρεις κορυφές η οποί θα είναι $3/i$ οι τρεις κορυφές που μας δίνουν τρεις αλλαγές για να επιτύχουμε το P_i , αλλά η πιθανότητα επιτυχίας ενός απο τα i σημεία στο περίβλημα είναι $1/i$. τελικά μπορούμε να γράψουμε ότι, για ένα επιτυχημένο υποσύνολο P_i έχουμε

$$E[\Delta(i, q, p_i)] = \frac{3}{i} \Delta(i, q)$$

και έτσι καταφέρνουμε να απομακρύνουμε την εξάρτηση απο την P_i . Τώρα έχουμε:

$$\sum_q E[\Delta(i, q, p_i)] = \frac{3}{i} \sum_{q \in P_i} E[\Delta(i, q)]$$

Αλλά την τελευταία πρόβλεψη μπορούμε να την υπολογίσουμε. Υπάρχουν $n - 1$ σημεία που υπολείπονται να υπολογιστούν, και έτσι υπάρχουν $n - 1$ επιλογές για το q , το σημείο $(n + 1)$ να επεξεργαστεί και έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$E[\Delta(i, p_{i+1})] = \frac{1}{n - i} \sum_q E[\Delta(i, q)]$$

Αντικαθιστώντας στο προηγούμενο άθροισμα, για ένα καθορισμένο υποσύνολο P_i επεξεργασμένων σημείων

$$\sum_q E[\Delta(i, q, p_i)] = \frac{3}{i} \sum_{q \in P_i} E[\Delta(i, q)] = 3 \frac{n - 1}{i} E[\Delta(i, P_{i+1})]$$

αυτό είναι ότι χρειαζόμαστε. Ο αριθμών των τριγώνων αυξάνεται απο το 0 με βήμα 0 με μέγιστο τα $2n - 4$ τρίγωνα σε ένα ολόκληρο περίβλημα με βήμα n . Εάν δούμε τον αριθμό των τριγώνων ως μια δυνητική λειτουργία, θα δούμε ότι κατά μέσο όρο υπάρχει διαφορά ανάμεσα των αναμενόμενων τιμών $T_i - T_{i+1}$ και $T_{i+1} - t_i$. Οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε

$$E\left[\sum_{\text{created } \Delta_s} | CL(\Delta) | \right] = \sum_{i=5}^n 3 \frac{n - 1}{i} E[| T_{i+1} - T_i |] \leq \sum_{i=5}^n 3 \frac{n - 1}{i} + E[| T_i - T_{i+1} |]$$

Ο αναμενόμενος αριθμός των τριγώνων δημιουργείται στο βήμα $i+i$, ο οποίος είναι ο βαθμός του τελευταίου σημείου που προστίθεται, οπότε η τελική μας σχέση γράφεται :

$$E\left[\sum_{\text{created } \Delta s} |CL(\Delta)|\right] \leq \sum_{i=5}^n 3 \frac{n-1}{i} 8 = 24 \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{i} = O(n \log n)$$

Τελικά, η ανάλυση που είδαμε λειτουργεί και για τα δυο προβλήματα και αποδίδει το ίδιο συμπέρασμα. Τα δυο προβλήματα είναι πανομοιότυπα, υπολογίζοντας την διαίρεση τριγώνων Delaunay σε K - διάσταση, είναι σαν να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα σε $(K+1)$ διάσταση: αρκεί να δούμε το πρόβλημα της K - διάστασης ενσωματωμένο σε $K+1$ διάσταση, αντιγράφοντας την πρώτη K - διάσταση αφήνοντάς την ίδια, και δημιουργώντας την $(K+1)$ οστή διάσταση προβάλλοντας τα σημεία σε ένα κατάλληλο περίβλημα στο επίπεδο ως ένα συμμετρικό παραβολοειδές.

2.3 Αλγόριθμοι Κατασκευής Κυρτού Περιβλήματος σε τρεις διαστάσεις

2.3.1 Ο αυξητικός αλγόριθμος ^[10]

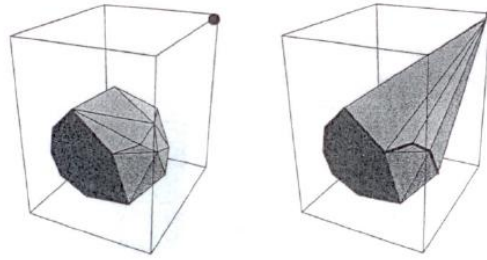
Η δομή του τρισδιάστατου αυξητικού αλγόριθμου είναι της μορφής: στην i -οστή επανάληψη, το τρέχον κυρτό περίβλημα H_i είναι το κυρτό περίβλημα του H_{i-1} και του τρέχοντος σημείου p_i . Για τον υπολογισμό του H_i διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Ελέγχουμε εάν το p_i ανήκει στο H_{i-1} . Εάν ανήκει αγνοούμε το p_i και $H_i = H_{i-1}$. Εάν δεν ανήκει τότε υπολογίζουμε τον «κώνο» που έχει κορυφή το p_i και εφάπτεται στο H_{i-1} , και κατασκευάζουμε το νέο περίβλημα.

Ο έλεγχος εάν το p_i είναι μέσα στο H_{i-1} αν και μόνο αν το p_i βρίσκεται από την αριστερή πλευρά του επιπέδου κάθε έδρας του H_{i-1} . Η κάθε έδρα θα πρέπει να έχει τον κατάλληλο προσανατολισμό, δηλαδή η σειρά των κορυφών κάθε έδρας όπως αυτή φαίνεται από το εξωτερικό του πολυέδρου, να ακολουθεί την ωρολογιακή φορά. Ο έλεγχος για το αν ένα σημείο είναι από την αριστερή πλευρά ενός επιπέδου που ορίζεται από τρία σημεία γίνεται χρησιμοποιώντας τον όγκο του τετραέδρου που ορίζουν τα τέσσερα σημεία. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο ανάλογο του πλήθους των εδρών του H_{i-1} που είναι $O(n)$.

Όταν το σημείο P_i δεν ανήκει στο H_{i-1} το πρόβλημα είναι πιο δύσκολο καθώς το περίβλημα θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Στις τρεις διαστάσεις η τροποποίηση απαιτεί την εύρεση δύο εφαπτόμενο επιπέδων τα οποία περικλείουν έναν «κώνο» από τριγωνικές έδρες όπου καθεμιά από αυτές ορίζεται από το P_i και μια ακμή του H_{i-1} . Κατόπιν θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τις έδρες αυτού του κώνου. Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο σημείο P_i και κοιτάζουμε προς το H_{i-1} . Επίσης υποθέτουμε ότι το P_i δεν είναι συν επίπεδο με καμία έδρα του πολυέδρου: δηλαδή μια έδρα του H_{i-1} είτε είναι εντελώς ορατή είτε δεν είναι καθόλου ορατή από το P_i . Δεν είναι δύσκολο να παρατήρησης κάνεις ότι οι ορατές έδρες είναι ακριβώς οι έδρες που θα αγνοήσουμε κατά την μετάβαση από το H_{i-1} στο H_i . Επιπλέον οι ακμές του ορίζοντα, οι ακμές δηλαδή που περικλείουν την ορατή περιοχή, είναι ακριβώς οι ακμές που μαζί με το P_i ορίζουν τις έδρες του κώνου.

Η περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη με τις ορατές έδρες και τον ορίζοντα της προηγούμενης παραγράφου, με την εξαίρεση ότι τώρα αντί να έχουμε δύο κυρτά πολυέδρα, έχουμε ένα κυρτό πολυέδρο και ένα σημείο. Εξ αιτίας αυτής της διαφοράς, ο ορίζοντας στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε τώρα είναι μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή κατά μήκος των ακμών του H_{i-1} .

Οι παραπάνω διαπιστώσεις συνεπάγονται ότι ο καθορισμός των ορατών και μη ορατών εδρών του H_{i-1} μας επιτρέπει να βρούμε τους ακμές του ορίζοντα, και άρα να κατασκευάσουμε τον κώνο, αλλά και να εντοπίσουμε τις έδρες που θα αγνοήσουμε. Το εάν μια έδρα είναι ορατή ή όχι εξαρτάται από το εάν το P_i είναι δεξιά από το επίπεδο της έδρας ή όχι αντίστοιχα.



Σχήμα 2.6: Το H_{i-1} και το H_i μετά την προσθήκη σημείου

Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε κατά τον έλεγχο του, εάν το σημείο P_i ανήκει στο H_{i-1} ή όχι, μία τριγωνική έδρα (a,b,c) είναι ορατή από το P_i αν και μόνο αν ο προ σημασμένος όγκος του τετραέδρου που ορίζουν τα (a,b,c) και P_i είναι αρνητικός. Μάλιστα, ο έλεγχος για το εάν το σημείο P_i ανήκει στο H_{i-1} και ο εντοπισμός των ορατών εδρών μπορούν να γίνουν παράλληλα, όπως φαίνεται στο αλγόριθμο στο τέλος της ενότητας αυτής, όπου και περιγράφονται τα βασικά βήματα του αλγόριθμου.

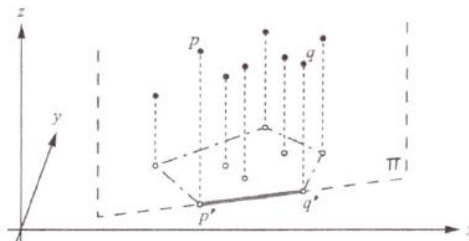
Δεδομένου ότι $F = O(n)$ και $E = O(n)$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυέδρου, οι βρόχοι που διατρέχουν τις έδρες και τις ακμές απαιτούν γραμμικό χρόνο. Καθώς αυτοί οι βρόχοι εκτελούνται για την επανάληψη ενός άλλου εξωτερικού βρόχου που εκτελείται n φορές, η συνολική πολυπλοκότητα χρόνου είναι τετραγωνική: $O(n^2)$

2.3.2 Ο Αλγόριθμος Περιτυλίγματος

Ο αλγόριθμος περιτυλίγματος επινοήθηκε από τους Chand και Karur το 1970 για τον υπολογισμό κυρτών περιβλημάτων σε όλες τις διαστάσεις. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων ο αλγόριθμος πραγματοποιεί την ακόλουθη διαδικασία.

Καταρχήν έχουμε ένα περίβλημα H και επιλέγουμε μια ακμή e του H η οποία πρόσκειται σε μια μόνο έδρα F , στο H . Στέφουμε το επίπεδο Π της F γύρω από την e με κατεύθυνση προς το σύνολο σημείων μέχρις ότου έρθει σε επαφή με το πρώτο σημείο p του συνόλου. Το τρίγωνο που ορίζεται από το p και την e είναι μια τριγωνική έδρα του κυρτού περιβλήματος και η διαδικασία περιτύλιξης συνεχίζεται. Το p χαρακτηρίζεται από την μικρότερη γωνία στροφής του Π . Μια σωστή υλοποίηση μπορεί να πετύχει πολυπλοκότητα χρόνου έως και $O(n^2)$, όπου αναλύεται σε $O(n)$ χρόνο για κάθε έδρα περιβλήματος και το πλήθος των εδρών είναι $O(n)$.

Ο αλγόριθμος περιτυλίγματος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι «output - size sensitive» δηλαδή έχει πολυπλοκότητα χρόνου $O(nh)$ για ένα περίβλημα με h έδρες.



Σχήμα 2.7: Ο Αλγόριθμος Περιτυλίγματος

Ο δισδιάστατος αλγόριθμος περιτυλίγματος ξεκινά περιτυλίγοντας το σύνολο των σημείων με μια οριζόντια ημιευθεία γύρω από το σημείο με την μικρότερη y συντεταγμένη. Αντίστοιχα, στις τρεις διαστάσεις χρειάζεται να βρούμε μια ακμή του κυρτού περιβλήματος γύρω από την οποία θα στρέψουμε κάποιο κατάλληλο επίπεδο. Οι ακμές του τρισδιάστατου κυρτού περιβλήματος προσδιορίζονται χάρις στην εξής ιδιότητα που είναι εύκολο να επαληθευτεί : ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία a και b είναι μια ακμή του κυρτού περιβλήματος αν και μόνο αν υπάρχει ένα επίπεδο που περνά από τα a και b και αφήνει όλα τα άλλα σημεία από τη μια μόνο πλευρά του.

Με βάση αυτή την ιδιότητα, μια ακμή εκκίνησης του τρισδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος, προσδιορίζεται ως εξής. Προβάλλουμε το δοσμένο σύνολο σημείων S στο επίπεδο, xy . Τότε κάθε τρισδιάστατο σημείο p του S , προβάλλεται σε ένα δισδιάστατο σημείο. Με εκτέλεση ενός μόνο βήματος του δισδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος προσδιορίζουμε μια ακμή του (δισδιάστατου) κυρτού περιβλήματος των προβολών των σημείων του S . Εάν η ακμή αυτή ορίζεται από τις προβολές p' και q' των σημείων p και q του S , τότε η pq είναι μια ακμή του κυρτού περιβλήματος του S σχήμα 1.10.

Η ακμή $p'q'$ είναι ακραία για το σύνολο των προβολών των σημείων και άρα όλα τα σημεία στο επίπεδο xy βρίσκονται από την μια μεριά της μόνον. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το επίπεδο Π που περνά από τα p' και q' και είναι παράλληλο με την διεύθυνση προβολής (δηλαδή, είναι παράλληλο στον άξονα των Z) τότε παρατηρούμε ότι το Π που περνά από τα p και q και αφήνει όλα σημεία του S από την μία πλευρά του. Δηλαδή, σύμφωνα με την ιδιότητα που είδαμε παραπάνω, η ακμή pq είναι ακμή του περιβλήματος του S .

Η διαδικασία εύρεσης της ακμής εκκίνησης απαιτεί συνολικά $O(n)$ χρόνο: $O(n)$ χρόνο για τον υπολογισμό των προβολών και $O(n)$ χρόνο για την εκτέλεση του πρώτου βήματος του δισδιάστατου αλγορίθμου περιτυλίγματος. Έχοντας βρει την ακμή pq ο τρισδιάστατος αλγόριθμος περιτυλίγματος μπορεί πλέον να ξεκινήσει στρέφοντας το κάθετο επίπεδο Π γύρω από την pq ωστόσο αυτό έλθει σε επαφή με κάποιο σημείο του S προσδιορίζοντας έτσι την πρώτη έδρα του κυρτού περιβλήματος.

2.3.3 Ο αλγόριθμος του Chan στις τρεις διαστάσεις [5]

Θα εξετάσουμε ένα διαφορετικό αλγόριθμο για την κατασκευή κυρτού περιβλήματος στο επίπεδο με χρονική πολυπλοκότητα $O(n \log n)$, μαζί με την επέκτασή του στις τρεις διαστάσεις. Στην χειρότερη δυνατή περίπτωση ο αλγόριθμος στις δύο διαστάσεις, είναι αρκετά γρήγορος λόγω του ότι δεν εκτελούνται ενδιάμεσες λειτουργίες. Η βασική ιδέα είναι να βελτιώσουμε τον αλγόριθμο του Jarvis's μέσω μια ομαδοποίησης. Αυτή η ιδέα ομαδοποίησης, μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα, εκτός από την κατασκευή του κυρτών περιβλημάτων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq E^3$ το οποίο έχει πλήθος σημείων n τέτοιο ώστε $n \geq 4$ σημείων. Υποθέτουμε ότι τα σημεία βρίσκονται σε διάφορες θέσεις, και ξέρουμε από τον τύπο του Euler ότι υπάρχουν $2h - 4$ έδρες εάν έχουμε h τρίγωνα στο περίβλημα.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτές τις $2h - 4$ έδρες στο περίβλημα, δημιουργώντας μια λίστα από κορυφές και ακμές, μαζί με μια δικτυωτή δομή του περιβλήματος P , σε χρόνο $O(h \log h)$. Ο ανώτερος διαστατικός αλγόριθμος από του Jarvis's είναι η μέθοδος wrapping των Ghand και Karim's, η οποία υπολογίζει τις έδρες του περιβλήματος μια κάθε φορά με την εξής διαδικασία: από τις δοθείσες έδρες f , εμείς παράγουμε τρεις παρακείμενες έδρες f_j εκτελώντας ένα βήμα από τον αλγόριθμο περιτυλίγματος για κάθε μια από τις τρεις ακμές e_j των $f(j = 1, 2, 3)$.

Στην φάση αυτή χρησιμοποιούμε το βήμα του αλγορίθμου περιτυλίγματος στο e_j για να υπολογίσουμε ένα σημείο $p_j \in P$ τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί την γωνία μεταξύ της f και του $con(p_j \cup \{p_j\})$ με $p_j \notin e_j$. Αυτό το βήμα μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(n)$, μπορούμε να βρούμε τις παρακείμενες έδρες του f σε χρόνο $O(n)$.

Υποθέτοντας ότι η αρχική έδρα f_0 , η οποία μπορεί να βρεθεί σε δύο βήματα του αλγορίθμου περιτυλίγματος, η διεξοδική ανίχνευση μπορεί να μας υπολογίσει όλες τις έδρες του κυρτού περιβλήματος. Χρησιμοποιώντας την διαδικασία για την ανίχνευση των επικαλύψεων, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι κάθε έδρα μπορεί να επεξεργαστεί μια φορά. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αλγόριθμος εκτελεί $3(2h - 4)$ βήματα περιτύλιξης και έτσι έχουμε $O(nh)$ χρόνο.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ιδέα ομαδοποίησης που χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα 1.1.3 για να βελτιώσουμε τον χρόνο πολυπλοκότητας σε βέλτιστο $O(n \log h)$ ενώ ταυτόχρονα διατηρούμε τον γραμμικό χώρο. Παίρνουμε τον αλγόριθμο του Graham και τον αντικαθιστούμε με τον αλγόριθμο των Preparata και Hong's που αφορά το κυρτό περίβλημα των τριών διαστάσεων, ο οποίος έχει την ίδια χρονική πολυπλοκότητα. Στην φάση αυτή θα πρέπει να υπολογίσουμε τις εφαπτόμενες γραμμές των τριών διατάσεων πολύτροπων μέσω μιας γραμμής. Για να επιτύχουμε μια χρονική πολυπλοκότητα ίδια με την προηγούμενη ενότητα, θα πρέπει η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε να εκτελέσει κάθε λειτουργία για τις εφαπτόμενες σε λογαριθμικό χρόνο. Η δομή που μπορεί να κάνει αυτή την πολυεδρική ιεραρχία που θέλουμε είναι η δομή των Dobkin και Kirkpatrick.

Η πολυεδρική αυτή ιεραρχία μπορεί να οριστεί σαν μια μονότονη ακολουθία των πολύτοπων σε τρεις διαστάσεις $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_\ell$ με την ιδιότητα ότι κάθε συνδεδεμένη συνιστώσα του $P_{k+1} - P_k$ έχει σταθερή πολυπλοκότητα. Κάθε P_k ονομάζεται επίπεδο της ιεραρχίας. Εάν το P_1 έχει σταθερό μέγεθος και $P_\ell = P$, τότε η ακολουθία ονομάζεται « εσωτερική ιεραρχική αντιπροσώπευση » του P . Ομοίως εάν $P_1 = P$ και η P_ℓ έχει σταθερό μέγεθος, τότε ονομάζεται « εξωτερική ιεραρχική αντιπροσώπευση » του P .

Για κάθε πολύτοπο P τριών διαστάσεων με m κορυφές, ο Dobkin και ο Kirkpatrick έδειξαν ότι οι εσωτερικές - εξωτερικές ιεραρχικές αντιπροσωπεύσεις των $O(\log m)$ επιπέδων υπάρχουν και μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $O(m)$. Το πολύτοπο του κάθε επιπέδου δεν αποθηκεύεται ρητά στην αντιπροσώπευση, αλλά, υπάρχουν δείκτες οι οποίοι βρίσκονται μεταξύ των δυο παρακείμενων επιπέδων και έτσι μπορούν να διασχίζουν επάνω και κάτω την ιεραρχία.

Αυτή η ιεραρχική αντιπροσώπευση παρέχει μια πολύ χρήσιμη δομή δεδομένων για τον χειρισμό των πολύτροπων στις τρεις διατάσεις. Για παράδειγμα, ανεβαίνοντας την εσωτερική ιεραρχία, μπορούμε να βρούμε την εφαπτόμενη του πολύγону που θέλουμε μέσω της δοθείσης γραμμής σε χρόνο $O(\log m)$ (η λύση της δυαδικής αναζήτησης για την εύρεση της εφαπτόμενης για κυρτά πολύγωνα μπορεί να θεωρηθεί ως η χρησιμοποίηση της ιεραρχίας). Κατεβαίνοντας την εξωτερική ιεραρχία, μπορούμε να λύσουμε το διπλό πρόβλημα για την εύρεση των τεμνόμενων ευθειών σε ένα πολύτροπο με μια ακτίνα σε χρόνο $O(\log m)$. Υπάρχουν και πολλές άλλες εφαρμογές της ιεραρχίας των Dobkin και Kirkpatrick, για παράδειγμα, αναφέρουμε τον πολυλογαριθμικό αλγόριθμο του Eppstein για την ανίχνευση του πότε τρία πολύτροπα σε E^3 έχουν κοινή διατομή.

Κατόπιν θα γράψουμε τον ψευδοκώδικα του αλγορίθμου για την δημιουργία του κυρτού περιβλήματος στις τρεις διαστάσεις. Χρησιμοποιώντας την ιεραρχία των Dobkin και Kirkpatrick για να αποθηκεύσουμε τα πολύτροπα στην γραμμή 3, μπορούμε να εκτελέσουμε την γραμμή 11 σε λογαριθμικό χρόνο για κάθε πολύτροπο $\text{conv}P_i$. Η ανάλυση του αλγορίθμου είναι πανομοιότυπη αυτού για τις δυο διαστάσεις.

Algorithm 4 Κυρτό Περίβλημα στις 3 διαστάσεις $(P, m, H) : P \subseteq E^3, 4 \leq m \leq n, \text{ και } H \geq 1$

```
1: Διαιρούμε το σύνολο  $P$  σε μικρές ομάδες σημείων  $P_1, \dots, P_{\lceil n/m \rceil}$  καθεμιά έχει μέγεθος  $m$ 
2: for all  $i = 1, \dots, \lceil n/m \rceil$  do
3:   υπολόγισε το περίβλημα  $(P_i)$  με το αλγόριθμο των Preparata και Hong's και αποθηκεύστε
   το στη ιεραρχία των Dobkin και Kirkpatrick
4:    $F, Q \leftarrow \{f_0\}$ , όπου  $f_0$  είναι κάποια αρχική έδρα του περιβλήματος  $(P)$ 
5:   for  $k = 1, \dots, 2H - 4$  do
6:     εάν  $Q = \emptyset$  τότε γύρνα στο  $F$ 
7:     διάλεξε  $f \in Q$  και τοποθέτησε  $Q \leftarrow Q - \{f\}$ 
8:     έστω  $e_j$  είναι οι ακμές του  $f (j = 1, 2, 3)$ 
9:     for  $j = 1, 2, 3$  do
10:      for  $i = 1, \dots, \lceil n/m \rceil$  do
11:        υπολόγισε το σημείο  $q_i \in (P_i)$  το οποίο μεγιστοποιεί την γωνία μεταξύ  $f$  και
         $\text{conv}(e_j \cup \{q_i\})$  ψάχνοντας στην ιεραρχία του  $\text{conv}(P_i)$ 
12:         $p_j \leftarrow$  το σημείο  $q$  από  $\{q_1, \dots, q_{\lceil n/m \rceil}\}$  το οποίο μεγιστοποιεί την γωνία μεταξύ  $f$  και
         $\text{conv}(e_j \cup \{q\}) (q \notin e_j)$ 
13:         $f_i \leftarrow \text{conv}(e_j \cup \{p_j\})$ 
14:        εάν  $f_i \notin F$  τότε
15:           $F \leftarrow F \cup \{f_i\}, Q \leftarrow Q \cup \{f_i\}$ 
16:          επέστρεψε ατελής
17:      end for
18:    end for
19:  end for
20: end for
```

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την στοίβα για να εφαρμόσουμε το Q και το «λεξικό» για να εφαρμόσουμε το F . Αφού υπάρχουν $O(h)$ «λεξικογραφικές» λειτουργίες, μπορούν να διεκπεραιωθούν σε χρόνο $O(h \log h)$. Στην πραγματικότητα, η πιο έξυπνη εφαρμογή της μεθόδου, είναι η αντικατάσταση του «λεξικού» με μια σειρά προτεραιότητας.

Όπως και πριν, επιλέγουμε μια ομάδα μεγέθους $m = H$ και μαντεύουμε το μέγεθος του h με μια αλληλουχία του H .

Algorithm 5 Κυρτό Περίβλημα στις 3 διαστάσεις $(P) : P \subseteq E^3$,

```
1: for  $t = 1, 2, \dots$  do do
2:    $L \leftarrow \text{GroupHull 3d}(P, m, H)$  όπου  $m = H = \min(2^{2^t}, n)$ 
3:   if  $L \neq \text{incomplete}$  then
4:     else
5:       επέστρεψε  $L$ 
6:     end if
7: end for
```

Κεφάλαιο 3

Διαγράμματα Voronoi - Delaunay-Εφαρμογές

3.1 Γενικά

Η έννοια του διαγράμματος Voronoi μελετήθηκε πρώτη φορά από τον Dirichlet (1850) και αργότερα από τον Voronoi (1908). Ένα διάγραμμα Voronoi, αποθηκεύει σχεδόν οτιδήποτε θα θέλαμε να μάθουμε αναφορικά με σχέσεις εγγύτητας μεταξύ των στοιχείων ενός δοθέντος ενός συνόλου στοιχείων, δηλαδή ποιο σημείο είναι πιο κοντά σε κάποιο άλλο, ποιο είναι μακρύτερα κτλ.

Οι εφαρμογές που έχουμε χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Voronoi είναι πολλές, μερικές από τις οποίες θα δούμε παρακάτω:

Προγραμματισμός διαδρομής Ρομπότ Κατά τον προγραμματισμό διαδρομής ενός ρομπότ φροντίζουμε ώστε αυτό να μην συγκρουστεί με κανένα εμπόδιο στον περιβάλλοντα χώρο. Η πιο σωστή στρατηγική είναι το ρομπότ να κινείται όσον το δυνατόν μακρύτερα από τα εμπόδια. Μια τέτοια διαδρομή ακολουθεί ακμές του διαγράμματος Voronoi.

Εντοπισμός κοντινότερου σημείου Έστω μια εταιρεία διαθέτει γραφεία ή αποθήκες σε διάφορες πόλεις, ώστε να εξυπηρετεί την ζήτηση των προϊόντων της σε όλη την επικράτεια. Κάθε φορά που υπάρχει ζήτηση ενός προϊόντος σε κάποιο σημείο, για λόγους μείωσης του κόστους μεταφοράς, ειδοποιείτε η αποθήκη που είναι πιο κοντά σε αυτό το σημείο για να προμηθεύσει το προϊόν. Η περιοχή «δικαιοδοσίας» κάθε αποθήκης είναι η περιοχή Voronoi της αποθήκης.

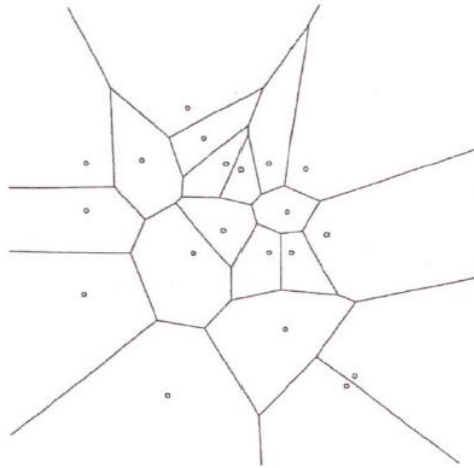
Εγκατάσταση νέου υποκαταστήματος Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εγκαταστήσουμε ένα νέο super market σε μια περιοχή όπου υπάρχουν ήδη αρκετά super markets.. Θεωρώντας ομοιόμορφη πληθυσμιακή κατανομή στην περιοχή, αναμένουμε ότι το νέο κατάστημα θα μεγιστοποιήσει τις πωλήσεις του εάν εγκατασταθεί όσο πιο μακριά γίνεται από τα υπάρχοντα super markets, δηλαδή στο κέντρο του μεγαλύτερου κύκλου που δεν περιέχει κανένα από τα υπάρχοντα super markets στο εσωτερικό του. Θα δούμε ότι αυτό το σημείο είναι μια κορυφή του διαγράμματος Voronoi.

3.2 Διάγραμμα Voronoi [9]

Έστω $P = P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ένα σύνολο από σημεία στο επίπεδο. Αυτά τα σημεία λέγονται κόμβοι(sites). Σε κάθε έναν από αυτούς τους κόμβους [10]αναθέτουμε όλα τα σημεία του επι-

πέδου που είναι πιο κοντά σε αυτόν παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο με βάση την Ευκλείδεια απόσταση. Όλα αυτά τα σημεία σχηματίζουν την περιοχή Voronoi του κόμβου. Ο μαθηματικός ορισμός της περιοχής Voronoi $V(p_i)$ του κόμβου p_i είναι:

$$V(p_i) = \{x \mid \forall j \neq i, d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\}$$



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα Voronoi για n=20 κόμβους

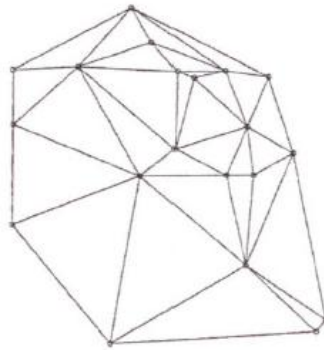
όπου με $d(a, b)$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια απόσταση των σημείων a και b . Σημειώνεται ότι κάθε περιοχή Voronoi είναι ένα κλειστό σύνολο δηλαδή, έχει σύνορο, και το σύνορό της αποτελείται από σημεία τα οποία δεν έχουν κοντινότερο κόμβο αλλά απέχουν από δυο ή περισσότερους κοντινότερους κόμβους. Τα σημεία αυτά για όλες τις περιοχές Voronoi σχηματίζουν το διάγραμμα Voronoi του συνόλου των κόμβων.

Το διάγραμμα Voronoi για δύο κόμβους συμπίπτει με την μεσοκάθετο L του ευθύγραμμου τμήματος που τα συνδέει. Η L είναι μια ακμή Voronoi, ενώ οι περιοχές Voronoi για τους δυο κόμβους είναι τα κλειστά ημιεπίπεδα που ορίζει η L . Για τρεις κόμβους, το διάγραμμα Voronoi αποτελείται από τρεις ημιευθείες (μεσοκαθετοι των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων) που ξεκινούν από το ίδιο σημείο, το κέντρο του κύκλου που περνά από τα τρία σημεία. Το σημείο αυτό είναι μια κορυφή Voronoi.

3.3 Delaunay Διαίρεση σε τρίγωνα

Έστω ότι μας δίνεται ένα σύνολο κόμβων P και έστω $V(P)$ το αντίστοιχο [14] διάγραμμα Voronoi. Υποθέτουμε ότι καμιά τετράδα σημείων δεν ορίζει ομοκυκλικά σημεία, οπότε κάθε κορυφή Voronoi έχει βαθμό ακριβώς 3. Κατασκευάζουμε το δυικό γράφημα G του $V(P)$: οι κορυφές του G αντιστοιχούν στις περιοχές του $V(P)$ δηλαδή στους κόμβους του P , και δυο κορυφές G συνδέονται με ακμή εάν οι αντίστοιχες περιοχές Voronoi έχουν κάποια κοινή ακμή. Παρατηρούμε οτιο G είναι ένα επίπεδο γράφημα: μπορούμε να τοποθετήσουμε κάθε κορυφή του G επάνω στον αντίστοιχο κόμβο p_i του P , οπότε οι προσκείμενες ακμές παρουσιάζουν την ίδια γωνιακή ταξινόμηση όπως οι ακμές της περιοχής Voronoi $v(p_i)$. Επιπλέον όλες οι περιοχές του G είναι τρίγωνα καθώς αντιστοιχούν στις κορυφές Voronoi οι οποίες έχουν βαθμό τρία. Το 1934 ο Delaunay απέδειξε ότι όταν το γράφημα G σχεδιαστεί με ευθείες ακμές παράγει μια διαίρεση του κυρτού περιβλήματος του συνόλου P σε τρίγωνα που είναι γνωστή και ως Delaunay

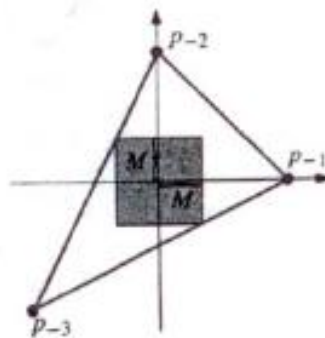
triangulation. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την διαίρεση των τριγώνων που αντιστοιχεί στο προηγούμενο σχήμα.



Σχήμα 3.2: Delaunay διαίρεση για τους κόμβους του προηγούμενου σχήματος

3.3.1 Αλγόριθμος υπολογισμού του τριγωνισμού Delaunay [9]

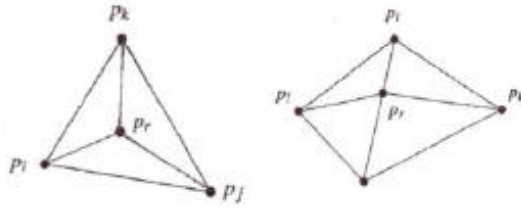
Σύμφωνα με τον ορισμό του, ένας γράφος Delaunay για ένα σύνολο σημείων P μπορεί να προκύψει πολύ εύκολα από τον διάγραμμα Voronoi. Στην συνέχεια ο τριγωνισμός Delaunay παράγεται τριγωνίζοντας όσες έδρες του γράφου είναι πολυγωνικές. Ο αλγόριθμος που θα εκθέσουμε στην συνέχεια είναι ένας τυχοποιημένος σταδιακός αλγόριθμος, με την έννοια ότι τα σημεία προστίθεται ένα - ένα με τυχαία σειρά ανανεώνοντας τον τριγωνισμό Delaunay για το τρέχον σύνολο σημείων.



Σχήμα 3.3: Επιλογή γενικού τριγώνου ώστε να περικλείονται όλα τα σημεία του P

Ο αλγόριθμος ξεκινάει με ένα αρχικό «πλασματικό» τρίγωνο αρκετά ευρύ ώστε να περικλείει όλα τα σημεία του P , βάσει τριών σημείων $\Omega = (p-1, p-2, p-3)$ που είναι αρκετά απομακρυσμένα και δεν περιλαμβάνονται σε κανένα τρίγωνο που ορίζεται από την τριάδα σημείων του P . Ένα τέτοιο τρίγωνο μπορεί να οριστεί από τα σημεία $p-1 = (3M, 0)$, $p-2 = (0, 3M)$, και $p-3 = (-3M, -3M)$, όπου M η μέγιστη - κατ απόλυτη τιμή - συντεταγμένη που εμφανίζεται μεταξύ δυο σημείων του P . Στο τέλος τα τρία πρόσθετα σημεία του Ω αφαιρούνται, μαζί με τα σχετικά τρίγωνα. Ο αλγόριθμος έχει συνοπτικά ως εξής:

Τυχοποιημένος αλγόριθμος για τριγωνισμό Delaunay



Σχήμα 3.4: Προσθήκη νέου σημείου στον τριγωνισμό

1. Σχημάτισε ένα αρχικό τρίγωνο από κατάλληλα επιλεγμένα σημεία $p-1, p-2, p-3$] το οποίο περικλείει όλα τα σημεία του P
2. Αρχικοποίησε τον τριγωνισμό T με αυτό το τρίγωνο
3. Τυχαία μετάθεση των n σημείων $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ του P
4. Για κάθε σημείο p_r του P :

Βρες το τρίγωνο $p_i p_j p_k \in T$ που περιλαμβάνει το p_r . Αν το p_r βρίσκεται εντός του πολυγώνου $p_i p_j p_k$ τότε πρόσθεσε ακμές από το p_r και έλεγξε την ύπαρξη παράνομων ακμών στα τρίγωνα που προκύπτουν:

- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_i p_j}, T)$
- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_j p_k}, T)$
- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_k p_i}, T)$

αλλιώς πρόσθεσε ακμές από το p_r προς την τρίτη κορυφή p_k, p_i των δύο τριγώνων $p_i p_j p_k$ και $p_i p_j p_l$ που προσπίπτουν στην ακμή $\overline{p_i p_j}$. Στα τέσσερα τρίγωνα που προκύπτουν συνολικά, έλεγξε για τυχόν ύπαρξη παράνομων ακμών:

- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_i p_l}, T)$
- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_l p_j}, T)$
- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_j p_k}, T)$
- ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΜΗΣ $(p_r, \overline{p_k p_i}, T)$

5. Διέγραψε από τον T τα τρία πρόσθετα σημεία $[p-1, p-2, p-3]$ και τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτά.

3.4 Ιδιότητες Voronoi και Delaunay

Το διάγραμμα Voronoi χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Το μέγεθος του διαγράμματος Voronoi $V(P)$ δηλαδή το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών, και περιοχών είναι $O(|P|)$.
2. Κάθε περιοχή Voronoi $V(p_i)$ είναι κυρτή.
3. Η περιοχή $V(p_i)$ είναι ανοιχτή εάν και μόνο εάν ο κόμβος p_i ανήκει στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του συνόλου P των κόμβων.
4. Εάν u μια κορυφή Voronoi στο σημείο που συναντώνται οι περιοχές $V(p_i)$ και $V(p_k)$ τότε η u είναι το κέντρο του κύκλου $C(u)$ που περνά από τους κόμβους P_i, P_j , και P_k .
5. Ο κύκλος $C(u)$ δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.

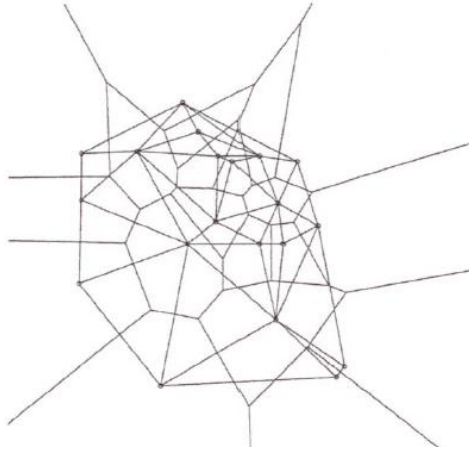
Η ιδιότητα 4 είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η κοινή ακμή δυο περιοχών Voronoi $V(p)$ και $V(p')$ βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος pp' ενώ η ιδιότητα 5 προκύπτει από το γεγονός ότι η κορυφή u έχει κοντινότερους κόμβους τους P_i, P_j και P_k .

Με την σειρά της η διαίρεση Delaunay έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα $D(P)$ είναι το δυικό γράφημα (με ευθείες ακμές) του διαγράμματος Voronoi.
2. Η $D(P)$ είναι διαίρεση σε τρίγωνα εάν δεν υπάρχουν τέσσερις ή περισσότεροι ομοκυκλικοί κόμβοι.
3. Το μέγεθος της $D(P)$, δηλαδή το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών, και περιοχών, είναι $O(|P|)$.
4. Οι ακραίες ακμές της $D(P)$ σχηματίζουν το κυρτό περίβλημα του P .
5. Το εσωτερικό κάθε τριγωνικής περιοχής της $D(P)$ δεν περιέχει κόμβους.
6. Εάν υπάρχει κύκλος που περνά από τους κόμβους P_i και P_j και δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του, τότε το ευθύγραμμο τμήμα P_iP_j είναι ακμή της $D(P)$. Επίσης ισχύει και το αντίστροφο: Για κάθε κορυφή Delaunay υπάρχει κύκλος που περνά από τις κορυφές που πρόσκεινται στην ακμή και δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.
7. Εάν P_j είναι ο κοντινότερος κόμβος στον P_i , τότε το ευθύγραμμο τμήμα P_iP_j είναι ακμή της $D(P)$.
8. Μεταξύ των διαιρέσεων σε τρίγωνα που μπορούμε να ορίσουμε με κορυφές ένα δοσμένο σύνολο σημείων, η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα είναι αυτή που μεγιστοποιεί την μικρότερη από τις γωνίες των τριγώνων.

Η ιδιότητα 6 προκύπτει από το γεγονός ότι το κέντρο ενός κενού κύκλου που περνά από τους κόμβους P_i και P_j έχει ως κοντινότερους κόμβους τους P_i και P_j δηλαδή, οι περιοχές Voronoi $V(P_i)$ και $V(P_j)$ είναι γειτονικές ή ισοδύναμα το P_iP_j είναι ακμή της $D(P)$. Η ιδιότητα 7 είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας 6 δεδομένου ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα P_iP_j περιέχεται εξ ολοκλήρου στο κύκλο με κέντρο p_i και ακτίνα ίση με την απόσταση των P_i και P_j . Τέλος εξαιτίας της ιδιότητας 8, η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην κατασκευή πλεγμάτων, καθώς σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι επιθυμητά τρίγωνα τα οποία είναι μακριά και λεπτά διότι τέτοια τρίγωνα έχουν μικρές γωνίες.

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα 3 της Delaunay, η οποία συνεπάγεται την ισχύ της ιδιότητας 1 της Voronoi λόγω δυικότητας των $V(P)$ και $D(P)$. Σημειώνεται ότι καθώς το διάγραμμα Voronoi



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα Voronoi και Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα

αποτελείται από $|P|$ περιοχές καθεμία από τις οποίες μπορεί να έχει $\Omega(|P|)$ ακμές, θα μπορούσε το μέγεθος του $V(P)$ να είναι τετραγωνικό στο πλήθος των κόμβων του P .

Ωστόσο το μέγεθος της $D(P)$ και συνεπώς και του $V(P)$ είναι $O(|P|)$. Η απόδειξη βασίζεται στον τύπο του Euler ο οποίος συνεπάγεται ότι κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $3n - 6$ ακμές και $2n - 4$ περιοχές, δηλαδή το συνολικό πλήθος κορυφών, ακμών και περιοχών της $D(P)$ είναι $O(|P|)$. Το άνω φράγμα $3|P| - 6$ στο πλήθος των ακμών συνεπάγεται ότι κατά μέσο όρο κάθε κορυφή στην Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα πρόσκειται το πολύ σε έξι ακμές.

3.5 Αλγόριθμοι υπολογισμού διαγραμμάτων Voronoi ^[10]

Οι πολλές εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi οδήγησαν σε μια ποικιλία από αλγόριθμους για τον υπολογισμό του. Θα εξετάσουμε στην συνέχεια τέσσερις αλγόριθμους οι δυο από τους οποίους επιτυγχάνουν τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi σε χρόνο $O(n \log n)$. Δεδομένου ότι το διάγραμμα Voronoi έχει γραμμικό μέγεθος, θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε αν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο. Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν είναι δυνατόν. Λόγω της ιδιότητας 4, μπορούμε από την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημά τους σε γραμμικό χρόνο. Δηλαδή ένας αλγόριθμος θα μπορούσε να υπολογίσει το διάγραμμα Voronoi (και συνεπώς και την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα) σε χρόνο $O(n \log n)$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του κυρτού περιβλήματος σε χρόνο $O(n \log n)$. Άτοπο.

3.5.1 Τομή Ημιεπιπέδων

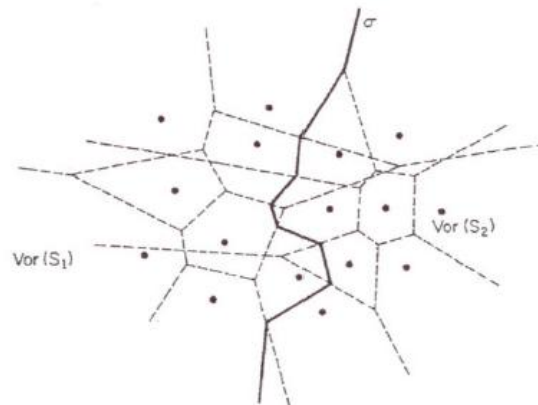
Η περιοχή Voronoi $V(p_i)$ ενός κόμβου (p_i) μπορεί να κατασκευαστεί ξεχωριστά ως η τομή $n - 1$ Ημιεπιπέδων: για κάθε κόμβο $p_j \neq p_i$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $p_j p_i$ και περιέχει το p_i , η τομή αυτών των Ημιεπιπέδων ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι πιο κοντά το p_i παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο και άρα συμπίπτει με την εφαρμογή Voronoi $V(p_i)$. Η τομή μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n \log n)$ με ένα αλγόριθμο βασισμένο στην τεχνική διαίρεσης και βασίλειου. Η κατασκευή ολόκληρου του διαγράμματος Voronoi απαιτεί την κατασκευή n περιοχών και άρα χρόνο $O(n \log n)$.

3.5.2 Αυξητικός Αλγόριθμος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα Voronoi k κόμβων και θέλουμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα που προκύπτει μετά την προσθήκη ενός ακόμη κόμβου p . Η βασική ιδέα είναι η εξής: Βρίσκουμε την περιοχή Voronoi, έστω $V(p_i)$, του υπάρχοντος διαγράμματος στην οποία βρίσκεται ο p . Τότε το νέο διάγραμμα Voronoi περιλαμβάνει το τμήμα της μεσοκαθέτου των p και p_i που περιέχεται μέσα στην $V(p_i)$: θα είναι η κοινή ακμή των περιοχών $V'(p)$ και $V'(p_i)$ στο νέο διάγραμμα. Τα άκρα του τμήματος αυτού βρίσκονται στο σύνορο της $V'(p_i)$. Έστω u το ένα από αυτά τα άκρα, το οποίο για παράδειγμα ανήκει στην κοινή ακμή των περιοχών $V(p_i)$ και $V(p_j)$. Το u ισαπέχει από τα p , p_i και p_j και άρα είναι κορυφή του νέου διαγράμματος Voronoi. Επίσης το τμήμα της μεσοκαθέτου των p και p_j που περιέχεται μέσα στην $V(p_j)$ ανήκει στο νέο διάγραμμα. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε την επόμενη κορυφή Voronoi του νέου διαγράμματος, από εκεί άλλη μια ακμή κ.ο.κ σχηματίζοντας τελικά ολόκληρη την περιοχή Voronoi του κόμβου p . Ο αλγόριθμος δαπανά χρόνο $O(n)$ για την εισαγωγή κάθε νέου κόμβου, και έχει συνολική πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^2)$. Παρά την τετραγωνική του πολυπλοκότητα, ο αλγόριθμος αυτός είναι η δημοφιλέστερη μέθοδος υπολογισμού του διαγράμματος Voronoi.

3.5.3 Αλγόριθμος Διαίρει και Βασίλευε

Το διάγραμμα Voronoi μπορεί να κατασκευαστεί με έναν σχετικά πολύπλοκο Διαίρει και Βασίλευε αλγόριθμο, που περιγράφηκε από τους Shamos και Hoey (1975) και έχει πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$. Το σύνολο των κόμβων διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 όπου το S_1 περιέχει τους $n/2$ αριστερότερους κόμβους και το S_2 τους υπόλοιπους, και τα αντίστοιχα διαγράμματα Voronoi $V(S_1)$ και $V(S_2)$ κατασκευάζονται αναδρομικά. Η δυσκολία εντοπίζεται στην συγχώνευση των επιμέρους λύσεων που απαιτεί η συρραφή των δυο διαγραμμάτων Voronoi $V(S_1)$ και $V(S_2)$. Η συρραφή γίνεται κατά μήκος μιας συνεχούς y μονότονης πολυγωνικής γραμμής η οποία αποτελείται από τμήματα μεσοκαθέτων ζευγών κόμβων με ένα κόμβο από το σύνολο S_1 και ένα κόμβο από το S_2 .



Σχήμα 3.6: Συγχώνευση διαγραμμάτων Voronoi

Η εύρεση αυτής της διαχωριστικής γραμμής και η συνένωση των κομματιών των επιμέρους διαγραμμάτων Voronoi σε ένα διάγραμμα μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $O(n)$, ώστε ο συνολικός αλγόριθμος να έχει την επιθυμητή $O(n \log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου.

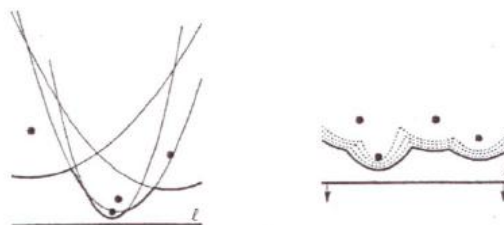
3.5.4 Ο Αλγόριθμος του Fortune^[9]

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '80, οι περισσότερες εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi χρησιμοποιούσαν τον $O(n^2)$ αυξητικό αλγόριθμο: η χειρότερη επίδοση θεωρούνταν ανεκτή έναντι της δυσκολίας κωδικοποίησης του πολύπλοκου αλγορίθμου διαίρει και βασίλευε. Το 1985 ο Fortune περιέγραψε ένα έξυπνο αλγόριθμο σάρωσης που είναι εύκολος να κωδικοποιηθεί και έχει $O(n \log n)$ πολυπλοκότητα χρόνου στην χειρότερη περίπτωση. [14]

Η γενική στρατηγική σε αλγορίθμους σάρωσης είναι η σάρωση του επιπέδου μια ευθεία γραμμή που κινείται παράλληλα με τον εαυτό της, π.χ μια οριζόντια γραμμή που κινείται από πάνω προς τα κάτω. Κατά την διάρκεια της σάρωσης, αποθηκεύουμε πληροφορία σχετικά με την δομή που υπολογίζουμε, συνήθως πληροφορία σχετική με την τομή της γραμμής σάρωσης με την δομή. Κατά την μετακίνησή της γραμμής σάρωσης, η πληροφορία δεν αλλάζει εκτός όταν η γραμμή βρεθεί σε ορισμένες θέσεις επεξεργασίας, τα "γεγονότα επεξεργασίας".

Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε αυτή την γενική στρατηγική στο πρόβλημα υπολογισμού του διαγράμματος Voronoi ενός συνόλου κόμβων $P = p_1, p_2, \dots, p_n$, στο επίπεδο, θεωρώντας μια οριζόντια γραμμή σάρωσης ℓ η οποία μετακινείται από επάνω προς τα κάτω. Τι πληροφορία σχετική με την γραμμή σάρωσης και το διάγραμμα Voronoi χρειάζεται να διατηρούμε?? Προφανώς δεν χρειάζεται να διατηρούμε την τομή του διαγράμματος Voronoi με την γραμμή σάρωσης, καθώς το τμήμα του διαγράμματος Voronoi που βρίσκεται ψηλότερα από την ℓ εξαρτάται τόσο από τους κόμβους που βρίσκονται ψηλότερα από την ℓ , όσο και από τους κόμβους που βρίσκονται χαμηλότερα από αυτήν: ενδεικτικά, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Voronoi έχει ακμές ακόμη και στο τμήμα του επιπέδου ψηλότερα από τον ψηλότερο κόμβο. Είμαστε αναγκασμένοι να εφαρμόσουμε την μέθοδο σάρωσης λίγο διαφορετικά: οποιαδήποτε στιγμή, θα διατηρούμε πληροφορία μόνο για το τμήμα του διαγράμματος Voronoi το οποίο δεν θα τροποποιηθεί λόγω των κόμβων που βρίσκονται χαμηλότερα από την ℓ . Προφανώς αυτό το τμήμα θα είναι τμήμα του διαγράμματος Voronoi των κόμβων ψηλότερα από την ℓ .

Ας συμβολίσουμε το κλειστό ημιεπίπεδο ψηλότερα από την ℓ με ℓ^+ . Ποιο είναι το τμήμα του διαγράμματος Voronoi ψηλότερα από την ℓ που δεν πρόκειται να τροποποιηθεί πλέον?? Με άλλα λόγια για ποια σημεία $q \in \ell^+$ γνωρίζουμε πλέον με σιγουριά ποιος είναι ο κοντινότερος κόμβος?? Η απόσταση του q από οποιοδήποτε κόμβο χαμηλότερα από την ℓ είναι προφανώς μεγαλύτερη από την απόσταση του q από την ℓ . Συνεπώς ο κόμβος που είναι πιο κοντά στο q δεν μπορεί να βρίσκεται χαμηλότερα από την ℓ εάν υπάρχει κόμβος $p_i \in \ell^+$ που απέχει από το q τόσο πολύ όσο απέχει το q από το ℓ . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι πιο κοντά σε ένα κόμβο $p_i \in \ell^+$ παρά στην ℓ περικλείεται από την παραβολή που ορίζεται από τον p_i και την ℓ , οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι πιο κοντά σε κάποιον κόμβο ψηλότερα από την ℓ παρά στην ℓ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ψηλότερα από κάποια από τις παραβολές για τους κόμβους στο ℓ^+ . Το σύνολο αυτών των σημείων περικλείεται (από κάτω) από μία σειρά από τόξα παραβολής την οποία την ονομάζουμε μέτωπο κύματος.



Σχήμα 3.7: Το μέτωπο κύματος

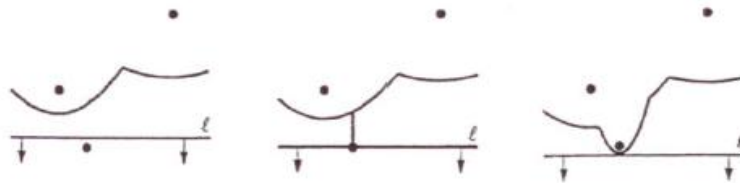
Το μέτωπο κύματος είναι μια x - μονότονη γραμμή δηλ. κάθε κατακόρυφη γραμμή το τέμνει

ακριβώς σε ένα σημείο.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η παραβολή συνεισφέρει περισσότερο από ένα τόξο στο μέτωπο κύματος. Ωστόσο το συνολικό πλήθος τόξων στο μέτωπο κύματος είναι $O(n)$. Επίσης είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία επαφής των τόξων στο μέτωπο κύματος ανήκουν σε ακμές του διαγράμματος Voronoi. Για την ακρίβεια, τα σημεία επαφής διατρέχουν ακριβώς το διάγραμμα Voronoi καθώς η γραμμή σάρωσης ℓ κινείται προς τα κάτω.

Κατά την σάρωση του επιπέδου, ο αλγόριθμος Fortune φροντίζει να διατηρεί πληροφορία για το μέτωπο κύματος αντί για την τομή του διαγράμματος Voronoi με την γραμμή σάρωσης ℓ . Ωστόσο δεν αποθηκεύουμε την ακριβή έκφραση των παραβολών από αποτελούν το μέτωπο κύματος και των σημείων επαφής τους καθώς αυτά αλλάζουν κατά την μετακίνηση της ℓ . Θα δούμε τις λεπτομέρειες του τρόπου αποθήκευσης αφού μελετήσουμε το πώς αλλάζει η γενική μορφή του μετώπου κύματος, δηλ. τότε ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος και τότε ένα τόξο συρρικνώνεται σε ένα σημείο και εξαφανίζεται.

Ας θεωρήσουμε πρώτα το ενδεχόμενο ένα νέο τόξο παραβολής να εμφανιστεί στο μέτωπο κύματος. Μια περίπτωση είναι όταν η γραμμή σάρωσης ℓ συναντήσει ένα νέο κόμβο. Η παραβολή που ορίζεται σε αυτόν τον κόμβο είναι αρχικά εκφυλισμένη με μηδενικό πλάτος : ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τον κόμβο με το μέτωπο κύματος. Καθώς η ℓ συνεχίζει να μετακινείται προς τα κάτω, η νέα παραβολή γίνεται όλο και πλατύτερη και το τμήμα της χαμηλότερα από τις άλλες παραβολές αποτελεί τόξο στο μέτωπο κύματος. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται σχηματικά αυτή τη διαδικασία.



Σχήμα 3.8: Εμφάνιση νέου τόξου στο μέτωπο κύματος

Ονομάζουμε τη θέση στην οποία η γραμμή σάρωσης συναντά ένα νέο κόμβο **γεγονός επεξεργασίας κόμβου**.

Αλλά τι συνεπάγεται στον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου ?? Καθώς το γεγονός επεξεργασίας κόμβου συνεπάγεται την εμφάνιση ενός νέου τόξου παραβολής στο μέτωπο κύματος διατρέχουν ακμές του διαγράμματος Voronoi, συμπεραίνουμε ότι θα εμφανιστούν δυο νέα σημεία επαφής και θα αρχίσουν να διατρέχουν νέες ακμές Voronoi. Για την ακρίβεια τα δυο αυτά σημεία επαφής συμπίπτουν και κατόπιν αρχίζουν να απομακρύνονται το ένα από το άλλο διατρέχοντας την ίδια ακμή προς αντίθετες κατευθύνσεις . Αρχικά, η ακμή αυτή δεν συνδέεται με το υπόλοιπο διάγραμμα Voronoi που έχουμε υπολογίσει, αργότερα όμως καθώς μεγαλώνει , θα «συναντηθεί» με κάποια άλλη ακμή και θα συνδεθεί στο διάγραμμα.

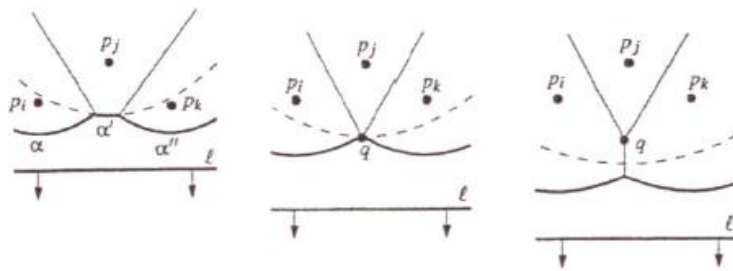
Συνοψίζοντας, σε ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου (δηλ. όταν η γραμμή σάρωσης συναντά ένα νέο κόμβο), ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος και μια νέα ακμή αρχίζει να διαγράφεται στο διάγραμμα Voronoi. Είναι δυνατόν ένα νέο τόξο να εμφανιστεί στο μέτωπο κύματος με ένα άλλο τρόπο ?? Αποδεικνύεται πως όχι, καθώς η μόνη άλλη περίπτωση θα ήταν εάν μια παραβολή που βρίσκεται πίσω από το μέτωπο κύματος το διαπερνούσε συνεισφέροντας ένα νέο τόξο, κάτι που όμως δεν είναι δυνατόν.

Λήμμα

Ένα νέο τόξο παραβολής εμφανίζεται στο μέτωπο κύματος μόνον σε ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου.

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι ότι το μέτωπο κύματος αποτελείται από το πολύ $2n - 1$ τόξα παραβολής: κάθε κόμβος που συναντάται οδηγεί στην εισαγωγή ενός νέου τόξου στο μέτωπο και τον χωρισμό το πολύ ενός από τα τόξα του μετώπου σε δύο κομμάτια, ενώ δεν υπάρχει περίπτωση εμφάνισης νέου τόξου με οποιονδήποτε άλλο τρόπο.

Η δεύτερή περίπτωση κατά την οποία παρουσιάζονται αλλαγές στο μέτωπο κύματος κατά την σάρωση είναι όταν ένα τόξο του μετώπου συρρικνώνεται σε ένα σημείο και εξαφανίζεται (επόμενο σχήμα).



Σχήμα 3.9: Εξαφάνιση τόξου παραβολής από το μέτωπο κύματος

Έστω a' το τόξο που εξαφανίζεται, και έστω a και a'' τα δύο τόξα που είναι γειτονικά στο a' πριν αυτό εξαφανιστεί. Αποδεικνύεται ότι τα τόξα a και a'' δεν μπορεί να είναι τμήματα της ίδιας παραβολής. Συνεπώς, τα τρία τόξα a , a' και a'' ορίζονται από τρεις διαφορετικούς κόμβους p_i , p_j και p_k . Τη στιγμή που εξαφανίζεται το a' , οι αντίστοιχες παραβολές περνούν από το ίδιο σημείο q . Το σημείο q ισαπέχει από την γραμμή σάρωσης ℓ και τους τρεις κόμβους, δηλ. είναι το κέντρο του κύκλου που περνά από τους κόμβους p_i , p_j και p_k και εφάπτεται στην ℓ στο χαμηλότερο σημείο του. Ο κύκλος αυτός δεν περιέχει κανένα κόμβο στο εσωτερικό του: η απόσταση ενός τέτοιου κόμβου από το q θα ήταν μικρότερη από την απόσταση του q από την ℓ , πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το q ανήκει στο μέτωπο κύματος. Δηλαδή, το σημείο q είναι μια κορυφή Voronoi. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει δεδομένου ότι παρατηρήσαμε νωρίτερα ότι τα σημεία επαφής του μετώπου κύματος διατρέχουν τις ακμές του διαγράμματος Voronoi. Έτσι, όταν ένα τόξο εξαφανίζεται από το μέτωπο κύματος και δύο σημεία επαφής του μετώπου συναντώνται, δύο ακμές του διαγράμματος Voronoi συναντάται επίσης. Ονομάζουμε την περίπτωση όπου η γραμμή σάρωσης εφάπτεται στο χαμηλότερο σημείο ενός κύκλου που περνά από τρεις κόμβους **γεγονός επεξεργασίας κύκλου**. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

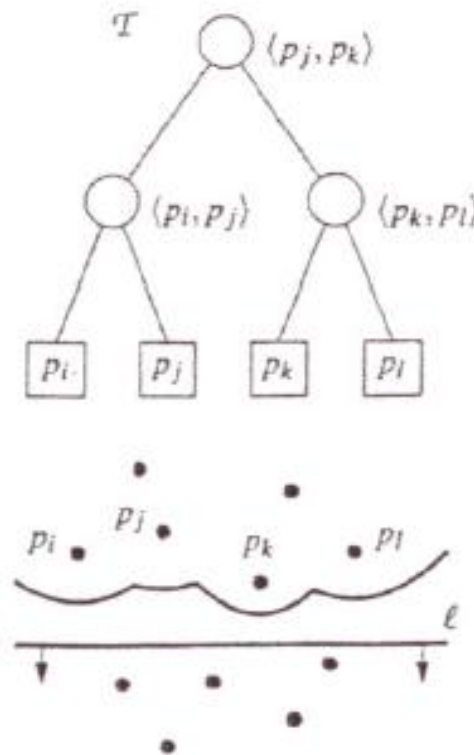
Λήμμα

Ένα τόξο παραβολής εξαφανίζεται από το μέτωπο κύματος μόνον σε ένα γεγονός επεξεργασίας κύκλου.

Τώρα πλέον γνωρίζουμε πως αλλάζει το μέτωπο κύματος κατά την σάρωση του επιπέδου και σε τι αντιστοιχούν οι αλλαγές αυτές στον υπολογισμό του του διαγράμματος Voronoi. Αυτό που απομένει είναι να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες δομές δεδομένων για την καταχώριση της πληροφορίας που χρειαζόμαστε για την σάρωση και τον υπολογισμό του διαγράμματος. Προφανώς, χρειαζόμαστε μια δομή για την καταχώριση του διαγράμματος Voronoi. Επίσης,

χρειαζόμαστε τις δυο δομές που απαιτούνται σε κάθε αλγόριθμο σάρωσης: μια " ουρά γεγονότων " για την καταχώρηση των γεγονότων επεξεργασίας (τα σημεία στάσης της γραμμής σάρωσης) και μια δομή για την αποθήκευση πληροφορίας σχετικής με την τρέχουσα θέση της γραμμής σάρωσης. Όπως είδαμε νωρίτερα, η δεύτερη δομή στην περίπτωση μας αποθηκεύει το μέτωπο κύματος. Οι δομές αυτές υλοποιούνται ως εξής:

Αποθηκεύουμε το διάγραμμα Voronoi που κατασκευάζουμε με κάποιον απο τους γνωστούς τρόπους αποθήκευσης επίπεδων γραφημάτων(winged edge, quad edge κ.ο.κ). Το μόνο στοιχείο που χρειάζεται προσοχή είναι ότι το διάγραμμα Voronoi περιέχει ακμές που μπορεί να εκτείνονται στο άπειρο απο τη μία ή τις δυο πλευρές. Κατά, την σάρωση αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα. Εάν όμως θέλουμε τελικά να έχουμε μια συνεπή παράσταση όλου του διαγράμματος Voronoi, χρειάζεται να προσθέσουμε ένα αρκετά μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γύρω απο το διάγραμμα μας.



Σχήμα 3.10: Μέτωπο κύματος - δυαδικό δέντρο

Το μέτωπο κύματος παρίσταται με ένα ισοζυγισμένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης T . Τα φύλλα του αντιστοιχούμε στα τόξα του μετώπου (που είναι x - μονότονο) κατά σειρά απο αριστερά προς τα δεξιά: το αριστερότερο φύλλο αντιστοιχεί στο αριστερότερο τόξο, το επόμενο φύλλο αντιστοιχεί στο δεύτερο τόξο απο αριστερά κ.ο.κ. Κάθε φύλλο αποθηκεύει τον κόμβο που ορίζει το τόξο στο οποίο αντιστοιχεί. Οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου αποθηκεύουν τα σημεία επαφής των τόξων: ένα σημείο επαφής παρίσταται απο το διατεταγμένο ζεύγος (p_i, p_j) όπου p_i και p_j είναι οι κόμβοι που ορίζουν τα τόξα παραβολής αριστερά και δεξιά απο το σημείο επαφής αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση για το μέτωπο κύματος, μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $O(n \log n)$ το τόξο του μετώπου που βρίσκεται κατακόρυφα πάνω σε ένα νέο κόμβο : σε έναν εσωτερικό κόμβο του δέντρου απλά συγκρίνουμε την x - συντεταγμένη του σημείου επαφής η οποία μπορεί να υπολογιστεί σε σταθερό/ο χρόνο απο τις συντεταγμένες των αντίστοιχων κόμβων και την θέση της γραμμής σάρωσης.

Στο δέντρο T αποθηκεύουμε επίσης δείκτες στις άλλες δυο δομές δεδομένων Κάθε φύλλο του T που αντιστοιχεί σε ένα τόξο a αποθηκεύει έναν δείκτη σε έναν κόμβο της ουράς γεγονότων και συγκεκριμένα στο γεγονός επεξεργασίας κύκλου στο οποίο θα εξαφανιστεί το a . Αυτός ο δείκτης είναι *nil* εάν δεν υπάρχει τέτοιο γεγονός επεξεργασίας κύκλου ή ίσως εάν δεν το έχουμε ήδη βρει. Τέλος, κάθε εσωτερικός κόμβος του δέντρου έχει έναν δείκτη στην εγγραφή της ακμής του διαγράμματος Voronoi την οποία διατρέχει το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Η ουρά γεγονότων υλοποιείται με μια ουρά προτεραιοτήτων (σωρός), όπου η προτεραιότητα ενός γεγονότος ισούται με την y - συντεταγμένη του. Η σωρός αποθηκεύει τα μελλοντικά γεγονότα που είναι ήδη γνωστά. Για ένα γεγονός επεξεργασίας κόμβου, αποθηκεύουμε τον κόμβο. Για ένα γεγονός επεξεργασίας κύκλου αποθηκεύουμε το χαμηλότερο σημείο του κύκλου. Στην δεύτερη περίπτωση αποθηκεύουμε επίσης ένα δείκτη στο φύλλο του δέντρου T που αντιστοιχεί στο τόξο παραβολής του μετώπου κύματος που θα εξαφανιστεί τότε.

Όλα τα γεγονότα επεξεργασίας κόμβου είναι γνωστά εξ αρχής, σε αντίθεση με τα γεγονότα επεξεργασίας κύκλου. Ωστόσο, ο αλγόριθμος προσδιορίζει τα γεγονότα επεξεργασίας κύκλου κατά την σάρωση, ελέγχοντας κάθε τριάδα τόξων παραβολής που θα είναι κάποια στιγμή διαδοχικά στο μέτωπο κύματος : τρία τέτοια τόξα ορίζουν γεγονός επεξεργασίας κύκλου μόνον εφόσον α) τα τρία τόξα αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς κόμβους και β) το χαμηλότερο σημείου του κύκλου που περνά από αυτούς τους τρεις κόμβους είναι χαμηλότερα από την τρέχουσα θέση της γραμμής σάρωσης. Η γενική μορφή του αλγορίθμου περιγράφεται στον επόμενο αλγόριθμο.

Algorithm 6 Ο αλγόριθμος του Fortune για το διάγραμμα Voronoi

```

1:  $T \leftarrow$  κενό δέντρο για την καταχώρηση του μετώπου κύματος
2:  $D \leftarrow$  κενή δομή για την καταχώρηση του διαγράμματος Voronoi
3:  $Q \leftarrow$  όλα τα γεγονότα επεξεργασίας κόμβου
4: while η  $Q$  δεν είναι κενή do
5:   αφαίρεσε από την  $Q$  το γεγονός  $q$  με την μεγαλύτερη  $y$ - συντεταγμένη
6:   if (το  $q$  είναι γεγονός επεξεργασίας κόμβου) then
7:      $P_I \leftarrow$  αντίστοιχος κόμβος
8:   else
9:     [ $p_j \leftarrow$  χαμηλότερο σημείο αντίστοιχου κόμβου ]
10:  end if
    Ενημέρωσε την παράσταση του διαγράμματος Voronoi συμπεριλαμβάνοντας ένα ορθογώνιο που περικλείει όλες τις κορυφές Voronoi (οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου  $T$  στην τελική του μορφή αντιστοιχούν στις ακμές Voronoi που εκτείνονται στο άπειρο) και σύνδεσε κατάλληλα τις εγγραφές για τις περιοχές Voronoi.
11: end while

```

Παρατηρήστε ότι αφού όλα τα γεγονότα έχουν υποστεί επεξεργασία και η ουρά γεγονότων Q έχει αδειάσει, το μέτωπο κύματος δεν έχει εξαφανιστεί : τα σημεία επαφής των τόξων παραβολής που το απαρτίζουν αντιστοιχούν στις ακμές Voronoi που εκτείνονται στο άπειρο. Χάρης στις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούμε, η επεξεργασία κάθε γεγονότος απαιτεί χρόνο $O(\log n)$. Καθώς έχουμε n γεγονότα επεξεργασίας κόμβου και $O(n)$ γεγονότα επεξεργασίας κύκλου (ένα για κάθε μια κορυφή Voronoi) ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$. Η πολυπλοκότητα χώρου είναι $O(n)$.

3.6 Εφαρμογές διαγραμμάτων Voronoi [7]

Κοντινότεροι γείτονες

Μία απο τις πιο συνηθισμένες εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi αφορά τον προσδιορισμό κοντινότερων γειτόνων. Εάν απλά ενδιαφερόμαστε να βρούμε ποιο απο τα σημεια ενός συνόλου S είναι πιο κοντά σε κάποιο σημείο P που μας ενδιαφέρει, τότε απλά ελέγχουμε όλα τα σημεια του S και επιστρέφουμε την σωστή απάντηση σε γραμμικό χρόνο.

Σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε να υποβάλλουμε πολλές ερωτήσεις για το ίδιο σύνολο S . Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο $O(n \log_n)$ το διάγραμμα Voronoi του συνόλου S οπότε το πρόβλημα προσδιορισμού του κοντινότερου γείτονα ενός σημείου p αναφέρεται στην εύρεση της περιοχής Voronoi στην οποία εντοπίζεται το σημείο p . Δεδομένου ότι ο εντοπισμός σημείου σε μια διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(\log_n)$, συμπεραίνουμε ότι εάν αρχικά δαπανήσουμε $O(n \log_n)$ για να επεξεργαστούμε το δοσμένο σύνολο S έχουμε την δυνατότητα να απαντάμε σε ερωτήσεις για τον προσδιορισμό του κοντινότερου γείτονα σε λογαριθμικό χρόνο.

3.6.1 Μέγιστος κενός κύκλος

Το πρόβλημα του μέγιστου κενού κύκλου ορίζεται ως εξής : δίδεται ένα σύνολο σημείων S στο επίπεδο και ζητείται ο μεγαλύτερος κύκλος με κέντρο στο σύνορο ή στο εσωτερικό του κυρτού περιβλήματος του S ο οποίος δεν περιέχει κανένα σημείο του S στο εσωτερικό του. Σε πρώτη φάση μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι σε πλήθος πιθανοί κύκλοι. Όμως μεις θα προσπαθήσουμε να περιορίσουμε αυτό το άπειρο σύνολο σε ένα μικρο σύνολο τελικών υποψηφίων κύκλων.

Ξεκινώντας απο κενούς κύκλους και μεγιστοποιώντας την ακτίνα τους διαπιστώνουμε ότι:

1. Εάν το κέντρο p του μεγαλύτερου κενού κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του κυρτού περιβλήματος του δοσμένου συνόλου σημείων S , τότε το p συμπίπτει με μια κορυφή του διαγράμματος Voronoi του S .
2. Εάν το κέντρο p του μεγαλύτερου κενού κύκλου βρίσκεται στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του δοσμένου συνόλου σημείων S , τότε το p συμπίπτει με μια ακμή του διαγράμματος Voronoi του S .

Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν σε έναν πολύ απλό αλγόριθμο για τον μέγιστο κενό κύκλο που προτάθηκε απο τον Toussaint το 1983. Σημειώνουμε ότι επειδή οι κορυφές Voronoi ενδέχεται να βρίσκονται έξω απο το κυρτό περίβλημα, θα πρέπει να κάνουμε τον αντίστοιχο έλεγχο. Μια απλοϊκή υλοποίηση του αλγορίθμου θα απαιτούσε $O(n^2)$ χρόνο. Ωστόσο, τόσο ο έλεγχος για το εάν ένα σημείο ανήκει σε ένα κυρτό πολύγωνο όσο και για το εάν μια ευθεία, η μι ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα τέμνει ένα κυρτό πολύγωνο και ο υπολογισμός του σημείου τομής μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(\log n)$, οδηγώντας σε $O(n \log n)$ συνολική πολυπλοκότητα χρόνου.
αλγόριθμος μεγιστος κενος κύκλος

3.6.2 Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο (minimum spanning tree) ενός συνόλου σημείων S είναι ένα δέντρο ελάχιστου μήκους που συνδέει όλα τα σημεία του S . Αποδεικνύεται ότι η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα του S έχει την ακόλουθη ιδιότητα.

Λήμμα

Ένα ελάχιστο συνδυαστικό δέντρο $MST(S)$ ενός συνόλου S είναι υποσύνολο της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα $D(S)$. Δηλαδή, εάν το ευθύγραμμο τμήμα ab είναι ακμή του $MST(S)$, τότε το ab είναι ακμή της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα $D(S)$.

Απόδειξη

Έστω ότι $ab \in MST(S)$ και $ab \in D(S)$. Αφού για κάθε ακμή e της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα υπάρχει κενός κύκλος που περνά από τα άκρα της e (ιδιότητα 6), κάθε κύκλος που περνά από τα a και b (και ο κύκλος με διάμετρο ab) περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του S στο εσωτερικό του. Έστω c ένα τέτοιο σημείο τότε $|ac| < |ab|$ και $|bc| < |ab|$. Η αφαίρεση της ακμής ab από το $MST(S)$ το χωρίζει σε δύο τμήματα, ένα που περιέχει το a και ένα δεύτερο που περιέχει το b . Έστω T_a και T_b τα δύο αυτά τμήματα αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το c ανήκει στο T_a . Αλλά τότε εάν προσθέσουμε την ακμή bc στα T_a και T_b βρίσκουμε ένα νέο συνδετικό δέντρο με μήκος ακμών μικρότερο από αυτό του $MST(S)$. Άτοπο

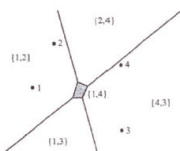
Το παραπάνω λήμμα μας επιτρέπει να βελτιώσουμε την πολυπλοκότητα του χρόνου του γνωστού αλγορίθμου του Kruskal για τον υπολογισμό ενός ελάχιστου συνεκτικού δέντρου. Αντί να ασχοληθούμε με όλες τις πιθανές ακμές ανάμεσα στα ζεύγη σημείων του S , υπολογίζουμε την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα $D(S)$ του S και ασχολούμαστε μόνο με τις $O(n)$ ακμές τις $D(S)$. Η πολυπλοκότητα χρόνου του τελικού αλγορίθμου είναι $O(n \log n)$, έναντι $O(n^2 \log n)$ του αρχικού αλγορίθμου του Kruskal

3.7 Διαγράμματα Voronoi k- τάξης

Η έννοια του διαγράμματος Voronoi γενικεύεται οδηγώντας στα λεγόμενα διαγράμματα Voronoi k- τάξης (kth order Voronoi diagrams).

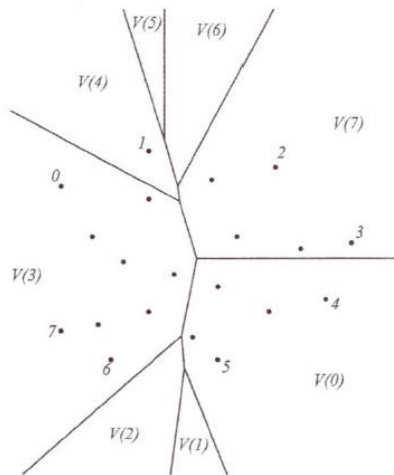
Ας θεωρήσουμε το διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης στις δύο διαστάσεις. Όπως και το διάγραμμα Voronoi της 1ης τάξεως, το διάγραμμα στις δύο διαστάσεις οδηγεί σε διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές. Μόνο που τώρα κάθε περιοχή αποτελείται από όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά σε δύο συγκεκριμένους κόμβους από ότι σε οποιοδήποτε άλλο κόμβο. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ενδιαφέρει ποιος από τους δυο αυτούς είναι πιο κοντά στο σημείο.

Με άλλα λόγια, ανεξάρτητα από το εάν ένα σημείο a του επιπέδου έχει κοντινότερο κόμβο τον p_i και δεύτερο κοντινότερο τον p_j , ενώ ένα σημείο b έχει κοντινότερο κόμβο τον p_j και δεύτερο κοντινότερο τον p_i , τα σημεία a και b ανήκουν στην ίδια περιοχή Voronoi του διαγράμματος Voronoi 2ης τάξης. Ένα διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.11: Διάγραμμα Voronoi 2ης τάξης

Ο ορισμός των διαγραμμάτων Voronoi k- τάξης στις δυο διαστάσεις, για οποιοδήποτε k , είναι αντίστοιχος: είναι η διαμέριση του επιπέδου σε περιοχές καθεμία από τις οποίες αποτελείται από όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά σε K συγκεκριμένους κόμβους από ότι σε οποιοδήποτε άλλο κόμβο. Ένα τέτοιο διάγραμμα Voronoi μπορεί να κατασκευαστεί από το διάγραμμα Voronoi



Σχήμα 3.12: Διάγραμμα Voronoi (n-1) τάξης

της αμέσως χαμηλότερης τάξης για το ίδιο σύνολο κόμβων. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε το διάγραμμα Voronoi k - τάξης $V_k(S)$ ενός συνόλου κόμβων S του επιπέδου. Προφανώς, κάθε περιοχή του $V_k(S)$ αντιστοιχεί σε k κόμβους του S οι οποίοι είναι κόμβοι που είναι πιο κοντά στα σημεία της περιοχής πο ότι οι υπόλοιποι κόμβοι. Ας θεωρήσουμε μια περιοχή Π του $V_k(S)$ και έστω T το αντίστοιχο σύνολο κόμβων. Τότε, το τμήμα του διαγράμματος Voronoi $(k+1)$ τάξης που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής Π συμπίπτει με το αντίστοιχο τμήμα του διαγράμματος Voronoi 1ης τάξης για το σύνολο $S - T$.

Συνεπώς, το διάγραμμα Voronoi $(k + 1)$ μπορεί να κατασκευαστεί με υπολογισμό και συνένωση των τμημάτων του για κάθε περιοχή του διαγράμματος k - τάξης. Αυτός ο τρόπος κατασκευής προϋποθέτει ότι έχουμε διαθέσιμο το διάγραμμα Voronoi k -τάξης. Αυτό με την σειρά του μπορεί να κατασκευαστεί με παρόμοιο τρόπο απο το διάγραμμα Voronoi $k - 1$ τάξης, το τελευταίο απο το διάγραμμα Voronoi $k - 2$ τάξης κ.ο.κ.

Λήμμα

Το διάγραμμα Voronoi k τάξης ενός συνόλου S του επιπέδου μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(k^3 n \log n)$, όπου n είναι ο πληθάρημος του συνόλου S .

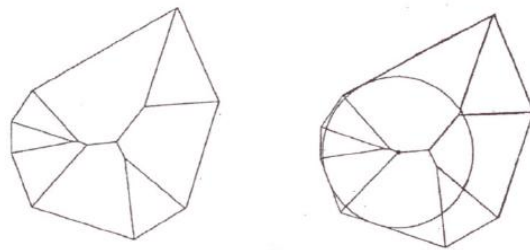
Ιδιαίτερης σημασίας είναι το διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ τάξης ενός συνόλου n κόμβων το οποίο αναφέρεται και ως farthest neighbor diagram. Κάθε περιοχή του διαγράμματος αυτού είναι κυρτή και αντιστοιχεί σε ένα κόμβο απο τα σημεία της περιοχής. Το διάγραμμα αποτελείται απο περιοχές μόνο για τους κόμβους που ανήκουν στο κυρτό περίβλημα του συνόλου των κόμβων. Το σχήμα μας δείχνει το διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ τάξης για ένα σύνολο $n = 20$ κόμβων : οι κόμβοι που ανήκουν στο κυρτό περίβλημα χαρακτηρίζονται απο ένα ακέραιο αριθμό ο οποίος χρησιμοποιείται επίσης στην δήλωση της αντίστοιχης περιοχής Voronoi.

Το διάγραμμα Voronoi $(n - 1)$ τάξης μπορεί να κατασκευαστεί με τον τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως, αλλά αυτό συνεπάγεται πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^3 \log n)$ και πιο αυστηρή ανάλυση συνεπάγεται πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^3)$. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μέθοδος διαίρει και βασίλευε μπορεί να εφαρμοστεί για την απ ευθείας κατασκευή του διαγράμματος επιτυγχάνοντας πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$ που είναι η βέλτιστη δυνατή. Ο αλγόριθμος είναι ανάλογος του αλγορίθμου διαίρει και βασίλευε για τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi 1ης τάξης, αλλά παρουσιάζει διάφορες στον τρόπο συρραφής των επιμέρους διαγραμμάτων.

3.8 Μέσος Άξονας Πολυγώνου

Ο μέσος άξονας (medial axis) ενός πολυγώνου P ορίζεται ως το σύνολο των σημείων του P που απέχουν από περισσότερα από ένα σημεία του συνόρου του P .

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ένα κυρτό οκτάγωνο και ο μέσος άξονας του. Με βάση αυτό το παράδειγμα θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι ο μέσος άξονας του κυρτού πολυγώνου είναι ένα δέντρο τα φύλλα του οποίου είναι οι κορυφές του πολυγώνου. Αυτό ισχύει και για μη κυρτά πολύγωνα. Κάθε σημείου του μέσου άξονα είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στο σύνορο του πολυγώνου σε δύο τουλάχιστον σημεία. Και όπως οι κορυφές Voronoi είναι κέντρα κύκλων που διέρχονται από τρεις κόμβους, οι κορυφές του μέσου άξονα είναι κέντρα κύκλων που εφάπτονται στο σύνορο σε τρία διαφορετικά σημεία.



Σχήμα 3.13: κυρτό οκτάγωνο και ο μέσος άξονας του – κορυφές Voronoi είναι κέντρα κύκλων που διέρχονται από τρεις κόμβους

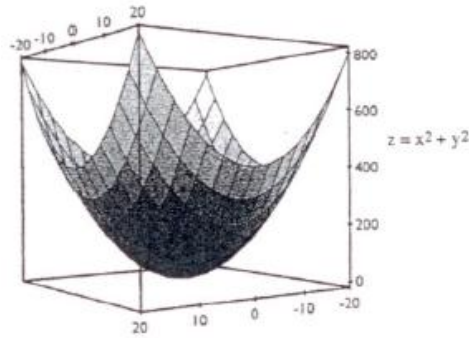
Η έννοια του μέσου άξονα εισήχθη από τον Blum ο οποίος παρατήρησε ότι ο μέσος άξονας είναι ένα είδος σκελετού στο "μέσο" του σχήματος. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές σε μή κυρτά ή καμπυλόγραμμα σχήματα. Ένα σχήμα μπορεί να χαρακτηριστεί σε κάποιο βαθμό από την δομή του μέσου άξονα. Ο μέσος άξονας ενός πολυγώνου με n κορυφές μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο, ενώ υπάρχουν και πιο εύκολοι στη υλοποίησή τους αλγόριθμοι που όμως έχουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα χρόνου (Yao και Rokne 1991) αν το πολύγωνο είναι κυρτό τότε ο μέσος άξονας του μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n)$ χρόνο.

3.9 Σχέση με το κυρτό περίβλημα

Το 1986, οι Edelsbrunner και Seidel ανακάλυψαν μια πολύ ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα στην Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα στις d διαστάσεις και στο κυρτό περίβλημα στις $d+1$ διαστάσεις. Αν και η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε d , θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση $d = 2$. Έστω $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο xy , και έστω x_i, y_i οι συντεταγμένες του σημείου p_i . Θεωρούμε το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ (επόμενο σχήμα) και προβάλλουμε τα σημεία του P πάνω σε αυτό. Δηλαδή, σε κάθε σημείο (x_i, y_i) απεικονίζεται στο τρισδιάστατο σημείο $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$. Υπολογίζουμε το κυρτό περίβλημα των τρισδιάστατων σημείων (επόμενο σχήμα) και αγνοούμε το "επάνω" τμήμα του συνόρου του περιβλήματος. Τέλος προβάλλουμε το υπόλοιπο τμήμα του συνόρου στο επίπεδο xy . Αποδεικνύεται ότι η προβολή είναι ακριβώς Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα του P . (επόμενο σχήμα).

Ας αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αυστηρά. Η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στο παραβολοειδές στο σημείο (a, b) είναι:

$$z = 2ax + 2by - (a^2 + b^2)$$



Σχήμα 3.14: Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα

Εάν μετακινήσουμε το επίπεδο κατά r^2 προς τα επάνω, αυτο θα έχει εξίσωση:

$$z = 2ax + 2by - (a^2 + b^2 + r^2)$$

και θα τμήσει το παραβολοειδές στα σημεία (x, y) τέτοια ώστε

$$z = x^2 + y^2 = 2ax + 2by - (a^2 + b^2) + r^2 \implies (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Τα σημεία τομής σχηματίζουν μια έλλειψη, η προβολή της οποίας στο επίπεδο xy είναι ένας κύκλος. (επόμενο σχήμα)

Ας αντιστρέψουμε τώρα την προσέγγιση για να οδηγηθούμε στην Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα. Ας θεωρήσουμε το επίπεδο Π που περνά από τρία σημεία $p_i, p_j, \text{ και } p_k$ του παραβολοειδούς τα οποία είναι οι κορυφές μια έδρας f του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος. Το επίπεδο αυτό τέμνει το παραβολοειδές και άρα μπορεί να εκληφθεί σαν την μετατόπιση κατά r^2 προς τα επάνω ενός παράλληλου επιπέδου Π που εφάπτεται στο παραβολοειδές.

Αφού η f είναι μια έδρα του κάτω τμήματος του κυρτού περιβλήματος, όλα τα άλλα σημεία βρίσκονται πάνω από το Π . Αφού βρίσκονται πάνω από το Π , βρίσκονται περισσότερο από r^2 ψηλότερα από το Π' . Συνεπώς τα σημεία αυτά προβάλλονται στο εξωτερικό του κύκλου της ακτίνας r στο επίπεδο xy . Δηλαδή, ο κύκλος αυτός δεν περιέχει κανένα σημείο του P στο εσωτερικό του και άρα η προβολή της f στο επίπεδο xy σχηματίζει ένα τρίγωνο Delaunay. Και αυτό ισχύει για κάθε έδρα του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος.

Λήμμα

Η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων P είναι ακριβώς η προβολή στο επίπεδο xy του κάτω τμήματος του συνόρου του κυρτού περιβλήματος $H(P')$ όπου $P' = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2) \mid (x_i, y_i) \in P$. Τα σημεία του P' είναι οι προβολές των σημείων του P στο παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Δεδομένου ότι το κυρτό περίβλημα στις τρεις διαστάσεις μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n \log n)$ το Λήμμα αυτό συνεπάγεται άλλον ένα $O(n \log n)$ αλγόριθμο για την Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα (και άρα και το διάγραμμα Voronoi) στις δυο διαστάσεις.

Η σχέση που περιγράψαμε παραπάνω ανάμεσα στην Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα και το διάγραμμα Voronoi στις δυο διαστάσεις και στο κυρτό περίβλημα στις τρεις διαστάσεις γενικεύεται και για χώρους οποιασδήποτε διάστασης. Έτσι το διάγραμμα Voronoi στις τρεις διαστάσεις μπορεί να κατασκευαστεί από ένα κυρτό περίβλημα στις τέσσερις διαστάσεις κλπ.

3.9.1 Σχέση με Τομές (Υπερ- Επιπέδων)

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός συνόλου σημείων μπορεί να υπολογιστεί από το κυρτό περίβλημα των προβολών των σημείων στο παραβολοειδές. Με χρήση του παραβολοειδούς, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε και το διάγραμμα Voronoi (κατευθείαν και όχι διαμέσου της Delaunay διαίρεσης σε τρίγωνα). Ας δούμε τώρα κάποια από τα αποτελέσματα της χρήσης του παραβολοειδούς. Ας ξεκινήσουμε, για λόγους απλότητας με το διάγραμμα Voronoi στον μονοδιάστατο χώρο (= τον άξονα των x)., σε αυτή την περίπτωση, το παραβολοειδές είναι η παραβολή $z = x^2$. Έστω $x = a$ και $x = b$ δύο σημεία θεωρούμε τις εφαπτόμενες στην παραβολή ή στις παραβολές των σημείων σε αυτήν, δηλ στα σημεία a, a^2 και b, b^2 Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων είναι αντίστοιχα :

$$z = 2ax - a^2 \text{ και } z = 2bx - b^2$$

Για να δούμε πού τέμνονται, συν- επιλύουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε :

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \Leftrightarrow x(2a - 2b) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow x = a + b/2.$$

Δηλαδή, το σημείο τομής των εφαπτόμενων προβάλλεται στον άξονα των x στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα a και b αλλά αυτό είναι το μονοδιάστατο διάγραμμα Voronoi των δύο σημείων. Με παρόμοιο τρόπο, εάν έχουμε ένα σύνολο σημείων S στον άξονα των x , θεωρούμε τις εφαπτόμενες στις προβολές των σημείων του S στην παραβολή $z = x^2$. Οι προβολές (στον άξονα των z) των σημείων τομής των ζευγών εφαπτόμενων που αντιστοιχούν σε σημεία S που είναι διαδοχικά κατά μήκος του άξονα των x ορίζουν το διάγραμμα Voronoi του συνόλου S .

Στις δυο διαστάσεις, αν θεωρήσουμε δύο σημεία (a, c) και (b, d) και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Τα εφαπτόμενα επίπεδα στις προβολές των δύο σημείων στο παραβολοειδές έχουν τις εξισώσεις :

$$z = 2ax + 2cy - (a^2 + c^2) \text{ και } z = 2bx + 2dy - (b^2 + d^2)$$

Εάν συν - επιλύσουμε τις δυο εξισώσεις βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} 2ax + 2cy - (a^2 + c^2) &= 2bx + 2dy - (b^2 + d^2) \\ \implies x(2a - 2b) + y(2c - 2d) &= (a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) \end{aligned}$$

Αυτή η εξίσωση είναι ακριβώς η εξίσωση της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (a, c) και (b, d) . Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα σύνολο κόμβων στο επίπεδο xy και ότι έχουμε φέρει τα εφαπτόμενα επίπεδα στις προβολές αυτών των κόμβων στο παραβολοειδές. Εάν θεωρήσουμε ότι το παραβολοειδές είναι διαφανές ενώ τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι αδιαφανή, και ότι βλέπουμε τα επίπεδα από το σημείο με $z = +\infty$, τότε τα επίπεδα θα είναι ορατά μέχρι την πρώτη τομή τους με κάποιο άλλο επίπεδο, οι πρώτες αυτές τομές προβάλλονται (στο επίπεδο xy) στις μεσοκαθέτους ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα τους κόμβους που όρισαν τα εφαπτόμενα επίπεδα. Δηλαδή, οι προβολές αυτών των τομών σχηματίζουν ακριβώς το διάγραμμα Voronoi των δοθέντων κόμβων. Τα αποτελέσματα γενικεύονται για οποιαδήποτε διάσταση.

Αναφορές

1. R. L. Graham, An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set, *Information Processing Letters* 1 (1972), no. 4, 132–133.
2. R. A. Jarvis, On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane, *Information Processing Letters* 2 (1973), no. 1, 18–21.
3. T. M. Chan CMSC 754: Lecture 4, More Convex Hull Algorithms (Feb2010)
4. T. M. Chan, Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions, *Discrete Comput. Geom.* 16 (1996), no. 4, 361–368, 107
5. T. M. Chan, Output-sensitive construction of convex hull, University of British Columbia (1995)
6. Prof. Bernard Moret, Analysis of Randomized Incremental Algorithms for 3D Convex Hulls and 2D Delaunay Triangulations, *Advabced Algorithms*, (Feb 2011)
7. F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational geometry, an introduction*, Springer-Verlag, New York, (1985), [κεφ. 3].
8. Γιάννης Εμίρης, *Υπολογιστική Γεωμετρία, Μια σύγχρονη αλγοριθμική προσέγγιση*, (2008) [κεφ2, κεφ4].
9. Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars, *Υπολογιστική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Επιμέλεια Ιωάννης Παπαδόγγονας (2011).
10. Σημειώσεις Υπολογιστικής Γεωμετρίας, Αν. Καθηγητής Λεωνίδας Παλιός, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [κεφ3, σελ 5].
11. Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Second Edition [κεφ. 7, p 151-157].